ANALIZA 4 - 2. pisni izpit

8. 7. 2011

1. Poišči ploskev $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, ki vsebuje krivuljo

$$y = 0, \quad x^2 + (z/2)^2 = 1,$$

in ima lastnost, da vsaka njena tangentna ravnina seka y os pod kotom $\pi/4$.

2. Klasificiraj naslednjo linearno PDE 2. reda in v novih koordinatah poišči njeno rešitev

$$u_{xx}\frac{1}{4x^2} - u_{yy} - u_x\frac{1}{4x^3} + \left(u_x\frac{1}{2x} + u_y\right) = 0,$$

ki zadošča pogojem

$$\left(u_x\frac{1}{2x} + u_y\right)|_{y=0} = \frac{1}{x^2}, \quad u(x, y = 0) = 2\ln x.$$

3. Poišči rešitev naslednje naloge za $u(x,t)$:

$$u_t = u_{xx} + u_x, \quad x \in (0,1), t > 0,$$

$$u(x = 0, t) = u(x = 1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, t = 0) = 1, \quad x \in [0,1].$$

4. Naj bo $R > 0$. Če je $u \in C^2(K(0,R)) \cap C(\overline{K(0,R)})$ nenegativna harmonična funkcija na $K(0,R) \subseteq \mathbb{R}^2$, dokaži, da velja

$$\frac{R - \sqrt{x^2+y^2}}{R + \sqrt{x^2+y^2}}u(0,0) \leq u(x,y) \leq \frac{R + \sqrt{x^2+y^2}}{R - \sqrt{x^2+y^2}}u(0,0)$$

za vse $(x,y) \in K(0,R)$.

Pomoč: Uporabi Poissonovo jedro za $K(0,R)$!