ANALIZA 4 - 1. pisni izpit

6. 7. 2012

1. Poišči rešitev naslednje PDE 1. reda
$$u_x^2 u + u_y^2 - 4 = 0,$$
ki zadošča pogoju $u(s, -s) = 0$.

2. Poišči kanonične koordinate za linearno PDE 2. reda
$$\sin^2 x\, u_{xx} + \sin 2x\, u_{xy} + \cos^2 x\, u_{yy} = x$$
in v teh koordinatah PDE tudi zapiši.

3. Naj bo $L > 0$. Poišči rešitev $u(x,t)$ naslednje naloge
$$u_t = 2u_{xx}, \quad x \in (0, L), t > 0,$$
$$u(x, 0) = \sin\frac{3\pi x}{2L}, \quad x \in (0, L),$$
$$u(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t > 0.$$

4. Naj bo $\alpha > 0$ ter $f, g \in C(\mathbb{R})$. Dana je naslednja Cauchyjeva naloga
$$u_{tt} + 2\alpha u_t + \alpha^2 u = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$
$$u(x, 0) = f(x),\ u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
(a) Poišči tako (gladko) funkcijo $\beta(t)$, da ob substituciji $v(x,t) := \beta(t)u(x,t)$ gornja PDE postane valovna enačba za novo funkcijo v.

   (b) Zapiši rešitev gornje Cauchyjeve naloge tako, da prepišeš celotno Cauchyjevo nalogo (tj. PDE in začetne pogoje) v jeziku funkcije v iz točke (a) in uporabiš D'Alembertovo formulo.