ANALIZA 4 - 2. izpit

26. 6. 2006

1. [25] V eksplicitni obliki zapisi resitev linearne PDE 1. reda

$$y^2 u_x + x^2 u_y = (x^2 + y^2)u,$$

ki zadosca $u(x, 0) = 1$.

2. Naj bo T distribucija, $f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$.

Trditev A: $fT = 0$,

Trditev B: $T(f) = 0$.

(a) [15] Dokazi $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$.

(b) [10] Poisci taka T, f, da zanju ne bo veljalo $\mathbf{A}$, bo pa veljalo $\mathbf{B}$.

3. [25] Naj bo $0 < a < b$ ter $\Omega = [a, b] \times [0, 1]$. Resi naslednjo nalogo za funkcijo $u(x, y)$:

$$x^2 u_{xx} + x u_x + u_{yy} = 1, \quad \text{na } \Omega,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

4. Naj bo $\lambda > 0$. Oglejmo si naslednjo nalogo za funkcijo $w(x, t)$:

$$w_{tt} = w_{xx} - \lambda^2 w, \quad \text{za } x \in \mathbf{R},\ t > 0,$$

$$w(x, 0) = 0, \quad \text{za } x \in \mathbf{R},$$

$$w_t(x, 0) = \varphi(x), \quad \text{za } x \in \mathbf{R},$$

kjer je φ znana gladka realna funkcija.

(a) [5] Ce $w(x, t)$ resi nalogo, pokazi, da $u(x, y, t) = \cos(\lambda y) w(x, t)$ zadosca valovni enacbi v $\mathbf{R}^2$ in zapisi vrednosti u ter u_t pri $t = 0$.

(b) [20] Resi valovno enacbo iz (a) in odtod izpelji, da je

$$w(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \varphi(x') J_0(\lambda \sqrt{t^2 - (x' - x)^2})\, dx'$$

resitev naloge.

Namig: V pomoc bo naslednji integral

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin x)\, dx.$$