ANALIZA 4 - 1. izpit

12. 6. 2006

1. [25] Poisci resitev nelinearne PDE 1. reda
$$u_y = \log u_x,$$
ki zadosca pogoju $u(x,0) = \log x$. Resitev zapisi v eksplicitni obliki.

2. [25] Naj bo $a > 0$. Z uporabo Fouriereve transformacije poisci splosno resitev distribucijske NDE
$$-y'' + a^2 y = 2\delta_{x_0},$$
kjer je $x_0 \in \mathbf{R}$.

3. [25] Naj bosta $h, R > 0$. Naj bo obmocje $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ doloceno z
$$0 < z < h, \quad y > 0, \quad x^2 + y^2 < R^2.$$
Poisci resitev toplotne enacbe na $\Omega \times \mathbf{R}_+$:
$$\Delta u = u_t, \quad \text{na } \Omega \times \mathbf{R}_+,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{za } t > 0,$$
$$u\big|_{t=0} = z, \quad \text{na } \Omega.$$

4. (a) [10] Naj bo $0 < a \leq b \leq c$, $b^2 = ac$. Nadalje, naj bo u harmonicna na $\mathbf{R}^n$. Dokazi
$$\int_{S^{n-1}} u(ax)u(cx)\, dS = \int_{S^{n-1}} u^2(bx)\, dS,$$
kjer je $S^{n-1} \subseteq \mathbf{R}^\mathbf{n}$ in smo uporabili pisavo
$$\alpha x \equiv (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$$
za $\alpha \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$.

   (b) [10] Naj bo u harmonicna na $\mathbf{R}^n$ in velja
$$u(0) = 0, \quad (\text{grad } u)(0) = 0.$$
Dokazi, da iz
$$|u(x)| \leq C|x|, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$
(pri nekem $C > 0$) sledi
$$u = 0.$$

   (c) [5] Poisci vse harmonicne funkcije na $\mathbf{R}^n$, ki zadoscajo
$$|u(x)| \leq C|x|$$
pri nekem $C > 0$.