ANALIZA 4 - 5. izpit

16. 11. 2006

1. [25] V eksplicitni obliki zapiši rešitev naloge

$$(x^2+y^2)u_x + 2xyu_y - xyu = 0, \quad u(x,1) = x^2.$$

2. (a) [10] Zapiši definicijo sodosti za distribucije. Natančneje, zapiši tak pogoj za distribucije, ki bo za distribucijo prirejeno navadni funkciji f izpolnjen natanko tedaj, ko je f soda funkcija.

   Enako stori za lihost.

   (b) [5] Ali je δ_0 soda ali liha distribucija ? Kaj pa δ_0' ?

   (c) [10] Pokaži, da je distribucija, ki je hkrati soda in liha, enaka 0.

3. [25] Reši naslednjo nehomogeno valovno enačbo za funkcijo $u(x,t)$ na $[0,a]$, $a>0$:

$$\begin{gathered} u_{tt} = u_{xx} + \sin t, \\ u(0,t) = u_x(a,t) = 0, \quad \text{za } t>0, \\ u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0. \end{gathered}$$

4. Naj bo u rešitev naloge

$$\begin{gathered} \Delta u = 0 \quad \text{na } K(0,1) \subseteq \mathbf{R}^2, \\ \left(u + \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial K(0,1)} = f, \end{gathered}$$

   kjer je f zvezna funkcija na $\partial K(0,1)$. V nadaljevanju uporabimo polarne koordinate.

   (a) [10] Dokaži, da je funkcija

$$v := u + r\frac{\partial u}{\partial r}$$

   harmonična na $K(0,1)$.

   Pomoč: V polarnih koordinatah je

$$\Delta w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}.$$

   (b) [15] Pokaži, da v zadošča običajni Dirichletovi nalogi na $K(0,1)$

$$\Delta v = 0, \quad v|_{\partial K(0,1)} = f$$

   in odtod izpelji izraz za $Q(r,\varphi,\varphi')$, da bo veljalo

$$u(r,\varphi) = \int_0^{2\pi} f(\varphi')Q(r,\varphi,\varphi')\,d\varphi'.$$