ANALIZA 4 - 4. izpit

25. 9. 2006

1. [25] Poišči ploskev v $\mathbf{R}^3$, ki vsebuje krivuljo

$$y = 3, \quad xz = 1,$$

in vsaka njena tangentna ravnina seka x os v tocki $(1, 0, 0)$.

2. [25] Poisci Fourierovo transformacijo funkcije

$$H_n(x\sqrt{2\pi}) \exp(-\pi x^2), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

kjer je H_n n-ti Hermitov polinom.

Pomoc: Uporabi rodovno funkcijo za Hermitove polinome

$$\exp(-w^2 + 2zw) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(z) w^n.$$

3. [25] Naj bo $\Omega := K(0, 1) \subseteq \mathbf{R}^2$. Resi naslednjo nalogo:

$$\Delta u = u_{tt} + u_t, \quad \text{na } \Omega \times \mathbf{R}_+,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = \sin t, \quad \text{za } t > 0,$$
$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, \quad \text{na } \Omega.$$

4. (a) [20] Naj bo $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ odprta mnozica z lastnostjo

$$(x, y) \in \Omega \quad \Rightarrow \quad (x, -y) \in \Omega.$$

Naj bo u harmonicna funkcija na

$$\{(x, y) \in \Omega \,|\, y > 0\},$$

zvezna na

$$\{(x, y) \in \Omega \,|\, y \geq 0\}$$

ter velja $u(x, 0) = 0$ za vse $(x, 0) \in \Omega$. Pokazi, da je moc u harmonicno razsiriti na Ω.

(b) Naj bo u omejena zvezna funkcija na zgornji (zaprti) polravnini, ki je harmonicna na zgornji (odprti) polravnini. Velja naj tudi $u(x, 0) = 0$ za vse $x \in \mathbf{R}$. Pokazi, da je $u = 0$.