ANALIZA 4 - 3. izpit

4. 9. 2006

1. [25] Resi (neskoncen) sistem NDE za realne funkcije realne spremenljivke $x_i(t)$, $i = 0, 1, 2 \ldots$:

$$\frac{dx_i}{dt} = (i+1)(x_i + x_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$x_i(t=0) = 1, \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Pomoc: Uporabi rodovno funkcijo $Q(y,t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) y^i$; z vrstami lahko postopas formalno.

2. V prostoru distribucij resi naslednje diferencialne enacbe:

(a) [15]

$$xy' - y = 0,$$

(b) [10]

$$x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

3. [25] Naj bosta $h, R > 0$. Naj bo obmocje $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ doloceno z

$$0 < z < h, \quad x^2 + y^2 < R^2.$$

Oglejmo si naslednjo nalogo:

$$\Delta u + \alpha u = u_t, \quad \text{na } \Omega \times \mathbf{R}_+,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{za } t > 0,$$

$$u\big|_{t=0} = \sin \frac{2\pi z}{h}, \quad \text{na } \Omega.$$

Doloci vrednosti realnega parametra α, pri katerih za resitev naloge velja

$$\lim_{t\to\infty} u(x,y,z,t) = 0.$$

4. [25] Doloci Poissonovo jedro za obmocje

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y > 0\} \subseteq \mathbf{R}^2.$$