ANALIZA 4 - 3. pisni izpit

8. 9. 2008

1. [25] Poišči rešitev naloge za funkcijo $u(x,t)$ $(c,k,\omega > 0)$:

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin(kx)\cos(\omega t), \quad x \in \mathbf{R}, t > 0$$

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Rešitev je elementarna funkcija, kot tako jo tudi zapiši.

2. [25] Z metodo separacije spremenljivk poišči rešitev naslednje naloge:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\frac{\partial u}{\partial x}\right) = xu_t, \quad x \in [1,4], t > 0,$$

$$u(x, t = 0) = 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x = 4, t) = 0.$$

3. [25] Določi Greenovo funkcijo za območje $\Omega = (0,\infty) \times (0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$.

4. [25] Dana je kvazilinearna PDE 1. reda za funkcijo $u(x,y)$:

$$f(x,y)u_x + g(x,y)u_y = a(x,y,u),$$

kjer sta f,g (povsod) neničelni gladki funkciji na neki okolici točke $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Če je $F(x,y)$ prvi integral sistema NDE $\dot{x} = f, \dot{y} = g$, za katerega velja $\nabla F(x_0,y_0) \neq 0$, pokaži, da na neki okolici (x_0,y_0) lahko uvedemo take koordinate α,β, da se PDE zapiše v obliki

$$u_\beta = A(\alpha,\beta,u).$$

Namig: Poskusi s koordinatami $\alpha = F(x,y), \beta = xf(x_0,y_0) + yg(x_0,y_0)$. Ne pozabi dokazati, da to res so koordinate, tj. da je $(x,y) \mapsto (\alpha,\beta)$ (lokalni) difeomorfizem.