ANALIZA 4 - 1. kolokvij

11. 4. 2011

1. Poišči rešitev $u = u(x, y)$ naslednje PDE

$$\frac{x}{u_x} + \frac{y}{u_y} + u = 0,$$

ki zadošča pogoju $u(s, -2s) = 3$. Rešitev zapiši v eksplicitni obliki.

2. Opazujmo verjetnostni populacijski model z enakima smrtnostjo in rodnostjo ($\alpha > 0$) ter konstantnim priseljevanjem ($\beta > 0$). Če $P_n(t), (n = 0, 1, 2, \ldots)$ pomeni verjetnost, da ob času t populacija šteje n osebkov, dinamiko tega modela opisuje naslednji (neskončni) sistem NDE (tu je $P_{-1}(t) := 0$)

$$\dot{P}_n = \alpha(n+1)P_{n+1} + (\alpha(n-1)+\beta)P_{n-1} - (2\alpha n+\beta)P_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Predpostavimo tudi, da je število osebkov ob času $t = 0$ enako $N \in \mathbb{N}_0$

$$P_N(0) = 1, \quad P_n(0) = 0 \quad \text{za } n \in \mathbb{N}_0 - \{N\}.$$

(a) Prevedi dano nalogo v ustrezno nalogo za rodovno funkcijo

$$Q(x, t) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(t)$$

in jo reši. Z vrstami ravnaj povsem formalno.

(b) V primeru $N = \alpha = \beta = 1$ določi verjetnosti $(P_n(t))_n$.

3. Poišči vse $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$, ki zadoščajo naslednji PDE

$$(-2x - y)u_x + (12x - 3y)u_y = u.$$

4. Klasificiraj naslednjo linearno PDE 2. reda za funkcijo $u = u(x, y)$ (na območju $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq y\}$) in zanjo poišči kanonične koordinate

$$-xu_{xx} + (x + y)u_{xy} - yu_{yy} + \frac{x + y}{x - y}(u_x - u_y) +$$

$$+(x + y + xy)(x - y)(xu_x - yu_y) = 0.$$

Nato poišči rešitev te PDE, ki zadošča pogojema

$$u(x = s, y = \frac{1}{s}) = -\exp\left(-(s + \frac{1}{s} + \frac{1}{2})\right),$$

$$u_y(x = s, y = \frac{1}{s}) = (s^2 + 2s + 2)\exp\left(-(s + \frac{1}{s} + \frac{1}{2})\right), \quad s > 1.$$