Analiza 4
1. kolokvij
17. 4. 2014

1. [25] Poišči gladko funkcijo $w(x,y)$, pri kateri je Pfaffova enačba

$$y\,dx - x\,dy + w(x,y)dz = 0$$

integrabilna in velja $w(s,1) = -e^{-s}$. Pri tej w Pfaffovo enačbo tudi reši.

2. [25] Poišči rešitev PDE 1. reda

$$u_y = u_x^2 y(1 + \frac{1}{x^2}),$$

ki zadošča $u(s,1) = \sqrt{s^2+1}$. Rešitev zapiši v eksplicitni obliki.

3. (a) [15] Pri izbranih funkcijah $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ je dana naslednja družina premic

$$\frac{x-\alpha}{f(\alpha)} = \frac{y-\beta}{g(\beta)} = z, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dokaži, da obstaja družina ploskev, ki so ortogonalne na dano družino premic, natanko tedaj, ko velja

$$f(\alpha)g(\beta)(f'(\alpha) - g'(\beta)) = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(b) [15] Določi vse nekonstantne $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, ki zadoščajo pogoju iz točke (a), in v točki (a) opisano družino ploskev tudi poišči.

4. [20] Naj bosta $a, b \in C^1(\mathbb{R}^2)$ in velja

$$xa(x,y) + yb(x,y) \le 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Če $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ reši PDE

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = u,$$

dokaži, da je $u \equiv 0$.

Pomoč: Če je $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{u}(t))$ karakteristika dane PDE, kaj lahko poveš o $\frac{d}{dt}(\tilde{x}(t)^2 + \tilde{y}(t)^2)$? Kaj sledi odtod ?