1. kolokvij iz Analize 4

3. 12. 1998

1. Naj bo

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt}(1+t^2)^{-z}dt.$$

(a) Zapiši funkcijo $F(z)$ v obliki $\int_{-\infty}^{\infty} e^{zf(t)}g(t)dt$.

(b) Določi prevale funkcije $f(t)$.

(c) Dokaži, da je

$$\mathrm{Re}(f(x+iy)) = -\frac{1}{2}\ln[(1+x^2-y^2)^2+(2xy)^2] - y,$$

$$\mathrm{Im}(f(x+iy)) = x - \mathrm{arctg}\frac{2xy}{1+x^2-y^2}.$$

Naj bo krivulja $\mathcal{C}$ presek pasu $(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$ in tiste nivojnice funkcije $\mathrm{Im}f$, ki gre skozi točko $(\sqrt{2}-1)i$

(d) Izrazi krivuljo $\mathcal{C}$ v obliki $y = y(x)$, obravnavaj monotonost in obnašanje v bližini roba intervala $(-\pi,\pi)$ ter skiciraj njen graf.

(e) Dokaži, da funkcija $\mathrm{Re}f|_{\mathcal{C}}$ doseže globalni maksimum v $(\sqrt{2}-1)i$.

(f) Dokaži, da velja $F(z) = \int_{\mathcal{C}} e^{izt}(1+t^2)^{-z}dt$.

Nasvet: Krivulja $\mathcal{C}$ razdeli polkrožnico $\Gamma_R = \{Re^{i\phi}|\phi\in[0,\pi]\}$ na tri dele $\Gamma_R^1, \Gamma_R^2, \Gamma_R^3$. Dokaži, da je $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^1} = \lim\limits_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^3} = 0$.

(g) Poišči prvi člen v asimptotskem razvoju funkcije $F(z)$.

2. Naj bo $L^1 = L^1[-\infty,\infty]$ in $L^2 = L^2[-\infty,\infty]$, naj bosta $f \in L^1$ ter $g \in L^2$ poljubni funkciji in naj bosta $\mathcal{F}_1 : L^1 \to C_0$ ter $\mathcal{F}_2 : L^2 \to L^2$ obe verziji Fourierjeve transformacije.

   (a) Dokaži da velja $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$. *Nasvet:* Zvito uporabi Cauchy-Schwartzovo neenakost in Fubinijev izrek.

   (b) Dokaži, da velja $\mathcal{F}_2(f * g)(y) = \mathcal{F}_1(f)(y)\mathcal{F}_2(g)(y)$. *Nasvet:* Kako se definira $\mathcal{F}_2$?

   Naj bo

$$(A\phi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}\phi(t)dt.$$

   (c) Dokaži, da je $A(L^2) \subseteq L^2$ in izračunaj $\|A\|$.

   (d) Dokaži, da je za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ operator $\lambda I - A$ injektiven.

   (e) Dokaži, da je za vsak $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,2]$ operator $\lambda I - A$ surjektiven.

   (f) Dokaži, da za vsak $\lambda \in [0,2]$ operator $\lambda I - A$ ni surjektiven. *Nasvet:* Dokaži, da $e^{-|x|}$ ni v njegovi sliki.

   (g) Določi spekter operatorja A. Dokaži, da operator ni kompakten. Direktno dokaži, da operator A ni Hilbert-Schmidtov.

3. Naj bo $a > 0$ poljubna konstanta.

   (a) Dokaži, da je $\mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}})(z) = \frac{e^{-a\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}$. *Nasvet:* Pomagaj si s substitucijo $s = \frac{a}{2\sqrt{t}} - \sqrt{zt}$.

   (b) Dokaži, da za "poljubno" funkcijo f velja

$$\frac{\mathcal{L}(f(x))(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} f(s)e^{-\frac{s^2}{4t}}ds)(z).$$

   (c) Za poljubno naravno število n izračunaj

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{z}(\sqrt{z}+1)^{n+1}})(t).$$

Točkovanje : 35+35+30 = 100.