ANALIZA 4 - 2. kolokvij

25. 1. 2006

1. [25] Z razvojem v potencno vrsto okrog izhodisca poisci resitev naloge

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = (x+1)e^x.$$

2. Za naslednja predpisa ugotovi, ce podajata distribucijo.

   (a) [10]
   $$\varphi \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varphi(\frac{1}{n}),$$

   (b) [15]
   $$\varphi \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi(\frac{1}{n}),$$

3. V prostoru distribucij resi naslednje diferencialne enacbe.

   (a) [15]
   $$x(x-1)y' = 0,$$

   (b) [10]
   $$xy' + y = 0,$$

   (c) [15]
   $$x(x-1)y' + y = 0.$$

4. Naj bo $a \in \mathbf{R}$. Navadni funkciji $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ priredimo novo funkcijo

$$F_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad F_a(x) := F(x+a).$$

   Tej preprosti operaciji, ki F priredi F_a, recimo *translacija za a*.

   (a) [10] Kako bi translacijo za a razsirili na distribucije ? Natancneje, ob dani distribuciji T ugani predpis za preslikavo $T_a : C_c^\infty(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, ki bo res podajal distribucijo, in bo veljalo, da je T_a porojen s funkcijo F_a takoj ko je T porojen z navadno funkcijo F.

   (b) [15] Poisci vse distribucije, za katere je $T = T_a$, $\forall a \in \mathbf{R}$.

   Namig: Izracunaj T'.