ANALIZA 4 - 2. kolokvij

12. 1. 2007

1. [25] Poišči rešitev linearne PDE 2.reda

$$x^3u_{xx} - 2x^2yu_{xy} + y^2xu_{yy} + 2x^2u_x + y^2xu = 0,$$

   ki zadošča pogojema $u(x,\pi) = e^x$, $u_y(x,\pi) = 0$ za $x > 0$.

   Pomoč: Nalogo rešuj v takih koordinatah kanonične forme, da v PDE parcialnih odvodov u prvega reda ni.

2. [25] Poišči vse $u \in C^2(\mathbf{R}^2)$, ki zadoščajo

$$u = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2),$$

   in imajo vse ničle na premici $ax + by = 0$, kjer je $a^2 + b^2 > 0$.

3. Dana je naslednja naloga za funkcijo $u(x,t)$:

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, \quad \text{za } x,t > 0,$$

$$u(0,t) = h(t), \quad \text{za } t \geq 0,$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0, \quad \text{za } x \geq 0,$$

   kjer sta $h, f \in C^2$ ter velja $h(0) = f(0), h'(0) = 0, h''(0) = c^2f''(0)$.

   [20] Zapiši izraz za rešitev naloge $u(x,t)$ in [10] preveri, da zapisan izraz podaja C^2 funkcijo za $x,t > 0$.

4. Naj za poljuben $\omega \in \mathbf{R}$ funkcija $u(x,t,\omega)$ reši nalogo

$$c^2u_{xx} - u_{tt} = \omega^2u, \quad \text{za } x \in \mathbf{R}, t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad \text{za } x \in \mathbf{R},$$

$$u_t(x,0) = g(x), \quad \text{za } x \in \mathbf{R},$$

   kjer je g znana gladka funkcija. V takem primeru je $u(x,t,\omega)$ (realno) analitična funkcija v spremenljivki ω (to dejstvo v nadaljevanju lahko predpostaviš brez dokaza).

   (a) [5] Izrazi $\frac{\partial^k u}{\partial\omega^k}(x,t,0)$ s funkcijo g pri $k = 0, 1$.

   (b) [15] Izrazi $\frac{\partial^k u}{\partial\omega^k}(x,t,0)$ s funkcijo g pri $k = 2$.

   (c) [15] Izrazi $\frac{\partial^k u}{\partial\omega^k}(x,t,0)$ s funkcijo g za poljuben nenegativen cel k.

   (d) [5] Izrazi $u(x,t,\omega)$ s funkcijo g.