ANALIZA 4 - 2. kolokvij

14. 1. 2009

1. Zapiši naslednjo PDE 2. reda v kanoničnih koordinatah $(x, y > 0)$

$$u_{xx} - (x+y)^2 u_{yy} = 0.$$

2. Zapiši rešitev naslednje naloge za funkcijo $u(x,t)$ $(c > 0)$:

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad x, t > 0$$

$$u(x,0) = x^2 e^{-x}, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \geq 0$$
$$u(0,t) + u_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

3. Z metodo razvoja v potenčno vrsto (okoli $(0,0)$) reši naslednjo nalogo za $u(x,t)$:

$$4u_t = u_{xx}, \quad u(x,0) = e^{-x^2}.$$

Rešitev je elementarna funkcija, kot tako jo zapiši.

Pomoč:
$$(1+t)^{-(l+1/2)} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{(-1)^k (2(l+k))! l!}{k!(2l)!(l+k)!}$$

4. Valovanje nehomogene napete strune (čigar linearna gostota je premosorazmerna s kvadratom x koordinate) je dano z enačbo (za $u(x,t)$)

$$(x^2 u_x)_x - u_{tt} = 0.$$

Želimo rešiti to enačbo na $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ob začetnih pogojih

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = g(x), \quad x > 0.$$

(a) Zapiši enačbo in začetne pogoje v kanoničnih koordinatah.

(b) Z metodo Greenove funkcije reši sistem iz (a).

Pomoč: Sistem enačb za Greenovo funkcijo $w(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ reši z uvedbo nove funkcije $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) := w(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \exp(a(\xi - \xi_0) + b(\eta - \eta_0))$, kjer števili a, b izbereš tako, da PDE 2. reda za v nima odvodov prvega reda.