ANALIZA 4 - 2. kolokvij

31. 5. 2012

1. [30] Poišči $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$, ki reši naslednjo nalogo

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad x > 0, t > 0,$$

$$u(0,t) + u_x(0,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = e^{-x},\ u_t(x,0) = 0 \quad x > 0.$$

2. [30] Poišči rešitev $u(x,t)$ naslednje naloge

$$u_t = u_{xx} + xe^{-t}, \quad x \in (0,1), t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in (0,1),$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$

in določi limito $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

3. [30] Naj bo $R > 0$. Dokaži, da je

$$G(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\ln\frac{(z-z_0)(R^2 - zz_0)}{(z-\overline{z_0})(R^2 - z\overline{z_0})}$$

Greenova funkcija za območje $\Omega = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \cap K(0,R) \subseteq \mathbb{R}^2$ tako, da pokažeš, da dana funkcija zadošča pogojem iz definicije Greenove funkcije.

4. [30] Naj bo $\alpha > 0$. S Fourierovo transformacijo poišči rešitev naslednje naloge

$$u_{tt} + 2\alpha u_t + \alpha^2 u = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

kjer je f dana realna funkcija realne spremenljivke.

Opomba 1: pri nalogah 2 (pri izračunu limite) ter 4 lahko postopaš povsem formalno.

Opomba 2: rešitev naloge 4 (tj. izražava rešitve u s funkcijo f) mora biti poenostavljena kolikor se da!