ANALIZA 4 - 3. kolokvij

18. 4. 2007

1. [40] Določi vse vrednosti realnega parametra $a > 0$, pri katerih je naslednja naloga za funkcijo $u(x, y)$ rešljiva:

$$\triangle u + u = 1, \quad \text{na} \quad 0 < x, y < a,$$
$$u\big|_{\partial[0,a]^2} = 0.$$

2. [40] Dano je območje

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4,\ x, y > 0\}.$$

Reši naslednjo nalogo za funkcijo $u(x, y, t)$:

$$u_{tt} - \triangle u = 0, \quad \text{na } \Omega \times \mathbf{R}_+,$$
$$u(x, y, t) = 0, \quad \text{za} \quad t \geq 0, (x, y) \in \partial\Omega,$$
$$u(x, y, 0) = 0, \quad \text{na } \Omega,$$
$$u_t(x, y, 0) = 1, \quad \text{na } \Omega.$$

3. (a) [10] Naj bo $\alpha, \beta > 0$. V eliptičnih koordinatah (μ, ν)

$$x = \alpha \cosh \mu \cos \nu$$
$$y = \alpha \sinh \mu \sin \nu$$

parametriziraj elipso

$$\Omega : \quad x^2/\cosh^2 \beta + y^2/\sinh^2 \beta = \alpha^2.$$

(b) [20] Izvedi separacijo spremenljivk v eliptičnih koordinatah za nalogo

$$\triangle u = \lambda u \quad \text{na} \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Natančneje, zapiši gornjo nalogo v eliptičnih koordinatah in iz nastavka

$$u = M(\mu)N(\nu)$$

izpelji diferencialni enačbi in robne pogoje za funkciji $M(\mu)$ ter $N(\nu)$.

(c) [20] Določi zvezo med Fourierjevimi koeficienti

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(\nu) \exp(-ik\nu)\, d\nu, \quad k \in \mathbf{Z},$$

ki sledi iz diferencialne enačbe in robnih pogojev za $N(\nu)$ iz točke (b).