ANALIZA 4 - 3. kolokvij

3. 4. 2009

1. Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$. Reši nalogo za $u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0,1], t > 0$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0, \qquad u(x,0) = \sin^3 x, \quad x \in [0,1].$$

   Pri katerih vrednostih parametra α velja $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$?

2. Naj bo $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 < 1,\, 0 < z < 3\}$. Reši nalogo za funkcijo $u(x,y,z,t)$:

$$\triangle u = u_{tt}, \quad (x,y,z) \in \Omega, t > 0,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t(x,y,z,t=0) = J_0(\xi_{0,5}\sqrt{x^2+y^2}).$$

   Pomoč: Nalogo rešuj v cilindričnih koordinatah. V teh koordinatah se operator $\triangle$ zapiše tako:

$$\triangle u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz}.$$

3. Dan je Sturm-Liouvilleov lastni problem:

$$-y'' + 2xy' = \lambda y, \quad y \in C^2(\mathbb{R}), \quad (1)$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} y'(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} y'(x) = 0. \quad (2)$$

   (a) Zapiši problem v standardni S-L obliki in odtod preberi, v katerem funkcijskem prostoru rešitve tvorijo kompleten ortogonalen sistem.

   (b) Poišči splošno rešitev NDE (1) v okolici $x = 0$ v obliki potenčne vrste.

   (c) Če veš, da pogoju (2) zadoščajo natanko tiste rešitve iz točke (b), ki so polinomi[1], določi vse lastne funkcije in ustrezne lastne vrednosti danega S-L problema.

[1] tega dejstva ni treba dokazovati!