ANALIZA 4 - 3. kolokvij

27. 3. 2008

1. [45] Reši nalogo za funkcijo $u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}, \quad x \in [-1,1], t > 0$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0, \qquad u(x,0) = 0, \quad x \in [-1,1].$$

2. [40] Naj bo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1,\ x\sqrt{3} > y > 0,\ x > 0\}$. Reši nalogo za funkcijo $u(x,y)$:

$$\triangle u = y(3x^2 - y^2) \quad \text{na } \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Pomoč:

$$\int x^{\nu+1} J_\nu(x)\, dx = x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) + C$$

$$\int x J_\nu^2(x)\, dx = \frac{x^2}{2}\left(J_\nu^2(x) - J_{\nu+1}(x) J_{\nu-1}(x)\right) + C$$

3. (a) [5] Naj bo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \pi > x > 0,\ x > y > 0\}$. Dokaži, da za vsaka $m, n \in \mathbf{N}$ funkcija

$$u_{m,n} := \sin mx\, \sin ny - \sin nx\, \sin my$$

reši nalogo

$$\triangle u = \lambda u \quad \text{na } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

pri nekem λ (ki ga tudi določi).

(b) [20] Pri kateri množici $X \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ tvorijo

$$(u_{m,n})_{(m,n)\in X}$$

kompleten ortogonalen sistem v $L^2(\overline{\Omega})$? Odgovor utemelji.

Pomoč: Pomagaj si z dejstvom (ki ga ni treba dokazati), da $(\sin nx\, \sin my)_{m,n\in\mathbf{N}}$ tvorijo kompleten ortogonalen sistem v $L^2([0,\pi] \times [0,\pi])$.