ANALIZA 4 - 4. kolokvij

30. 5. 2006

1. [25] Naj bo $\Omega = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \subseteq \mathbf{R}^2$. Poisci neko resitev naloge

$$\Delta u = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \chi_{[-b,b]}(x),$$

kjer je $\chi_{[-b,b]}$ karakteristicna funkcija intervala $[-b, b] \subseteq \mathbf{R}$, $(b > 0)$.

2. [25] Naj bo $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ dolocena z neenakostmi

$$y > 0, \quad x \sin\alpha - y\cos\alpha > 0, \quad x^2 + y^2 < 1,$$

kjer je $\alpha \in (0, 2\pi)$. Poisci resitev naslednje naloge za funkcijo $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$

$$\Delta u = x^2 + y^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

3. Naj bo $L > 0$. Oglejmo si naslednjo nalogo za funkcijo $u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{za } 0 < x < L,\ t > 0,$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{za } t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{za } 0 < x < L,$$

kjer je f neka vnaprej znana zvezna realna funkcija na $[0, L]$, ki zadosca $f(0) = f(L) = 0$.

(a) [15] Naj bo $K(x, y, t)$ standardno toplotno jedro za $\mathbf{R}$. Nadalje naj bo $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ taka razsiritev funkcije f, ki zadosca pogojema

$$F(x) = -F(-x), \quad F(x) = -F(2L - x).$$

Pokazi, da je

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y, t)F(y)\, dy$$

resitev naloge.

(b) [5] Sedaj si mislimo f razsirjeno na $\mathbf{R}$ tako, da je $f(x) = 0$ za vse $x \notin [0, L]$. Dokazi, da funkcija

$$F(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(f(2nL + x) - f(2nL - x)\right)$$

zadosca pogojema iz tocke (a).

(c) [5] Iz tock (a) in (b) izpelji izraz za toplotno jedro za $[0, L]$. Natancneje, poisci funkcijo $G(x, y, t) : [0, L] \times [0, L] \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, da bo

$$u(x,t) = \int_0^L G(x,y,t) f(y)\, dy$$

resitev naloge pri poljubnem f. Funkcijo $G(x, y, t)$ izrazi s *funkcijo theta*

$$\theta(z,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi(z+n)^2/\tau\right).$$

4. [25] Poisci resitev naloge ($a > 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin t \quad \text{za} \quad -a < x < a,\ t > 0,$$

$$u(-a,t) = -\sin(t), \quad u(a,t) = \sin(t), \quad \text{za} \ \ t > 0$$

$$u(x,0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x^2 - a^2. \quad \text{za} \quad -a < x < a$$