ANALIZA 4 - 4. kolokvij

31. 5. 2007

1. [35] Nihanje viseče strune z linearno gostoto $\rho > 0$ opišemo z enačbo

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((T + g\rho x)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Tu je $u(x,t)$ odmik strune od (vertikalne) ravnovesne lege, $g > 0$ gravitacijski pospešek ter $T > 0$ sila, s katero na spodnjem koncu napenjamo struno.

Predpostavimo, da je struna dolžine $l > 0$ vpeta na obeh koncih

$$u(x = 0, t) = u(x = l, t) = 0$$

in na začetku miruje

$$u_t(x, t = 0) = 0$$

v legi

$$u(x, t = 0) = x(1 - x/l).$$

Z metodo separacije poišči eksaktno rešitev te naloge.

2. Naj bo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$.

(a) [10] Določi Greenovo funkcijo za Ω.

(b) [10] Določi Poissonovo jedro za Ω.

(c) [10] Poišči rešitev naloge

$$\triangle u = 0, \quad \text{na } \Omega,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \chi_{[-1/2,1/2]\times 0}.$$

3. [30] Naj bo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y > 0\}$ ter $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonična in omejena na Ω. Pokaži, da je

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

4. [20] Naj bo $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ konformna bijekcija območij $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbf{R}^2$, razširljiva do difeomorfizma $\overline{\Omega}_1 \to \overline{\Omega}_2$. Če je P_2 Poissonovo jedro na Ω_2, kako se z njim in Φ izraža Poissonovo jedro P_1 na Ω_1 ? Odgovor utemelji.