ANALIZA 4 - 4. kolokvij

7. 5. 2008

1. [25] Z metodo separacije spremenljivk reši nalogo za funkcijo $u(x,y)$:

$$\triangle u = 0, \quad 0 < x, y < 1,$$
$$u(0,y) = u(x,0) = 0, \quad u(1,y) = y, \quad u(x,1) = x.$$

2. (a) [25] Naj bo $0 < \alpha < \pi/2$ in $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < x \tan\alpha\}$. Določi Greenovo funkcijo in Poissonovo jedro za Ω.

   (b) [10] Reši nalogo za funkcijo $u(x,y)$:

$$\triangle u = 0 \quad \text{na } \Omega,$$
$$u(x,y) = 1 \quad \text{za } (x,y) \in \partial\Omega, x^2 + y^2 \leq 1,$$
$$u(x,y) = 0 \quad \text{za } (x,y) \in \partial\Omega, x^2 + y^2 > 1.$$

3. (a) [20] Poišči vse lastne funkcije Sturm-Liouvilleovega problema

$$-x^2 y'' - 3xy' = \lambda y, \quad x \in [1,2],$$
$$y(1) = y(2) = 0.$$

   V katerem funkcijskem prostoru tvorijo lastne funkcije kompleten ortogonalen sistem ?

   (b) [15] Reši nalogo za funkcijo $u(x,t)$:

$$x^2 u_{xx} + 3x u_x = u_t, \quad x \in [1,2], t > 0,$$
$$u(1,t) = u(2,t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = (x-1)(2-x).$$

4. (a) [15] Pokaži Harnackovo neenakost: za pozitivno funkcijo u, ki je harmonična na $K(0,R) \subseteq \mathbb{R}^2$ velja

$$\frac{R-r}{R+r} u(0) \leq u(r,\varphi) \leq \frac{R+r}{R-r} u(0)$$

   na $K(0,R)$.

   Pomoč: Neenakost izpelji iz izražave $u(r,\varphi)$ kot konvolucije Poissonovega jedra za $K(0,R)$ in robnih vrednosti u na $K(0,R)$.

   (b) [10] Poišči vse pozitivne harmonične $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$.