Analiza na mnogoterostih

Franc Forstnerič

8. januar 2013

Kazalo

Poglavje I

GLADKE MNOGOTEROSTI

I.1 Uvod

Svet, ki nas obkroža, ni raven, ampak je trirazsežna mnogoterost. Če sledimo ideji fizikov in dodamo čas kot četrto spremenljivko, dobimo štiridimenzionalno mnogoterost prostor-čas. Že Einstein je spoznal, da je le-ta raven samo lokalno, globalno pa je ukrivljen; z njegovim študijem se ukvarja splošna teorija relativnosti. In zakaj bi se ustavili pri dimenziji 4? Lahko dodamo še dimenzije, ki opisujejo kvantna stanja delcev in dobimo 10-dimenzionalno mnogoterost. Nekatera najzanimivejša vprašanja sodobne matematike in njenih uporab se dotikajo globalnih lastnosti mnogoterosti. Teorija mnogoterosti je ena najbolj interdisciplinarnih področij sodobne matematike in je za moderno geometrijo in topologijo, pa tudi za matematično fiziko, mehaniko ter številna druga področja znanosti, prav tako fundamentalne narave, kot je pojem realnih števil za elementarno analizo.

Matematično povedano: Gladka mnogoterost dimenzije n je Hausdorffov topološki prostor, ki izgleda lokalno v okolici vsake točke tako kot n-dimenzionalni evklidski prostor, ti lokalni kosi pa so zlepljeni skupaj z gladkimi difeomorfizmi. Najpreprostejši primeri so krivulje in ploskve v evklidskem prostoru.

Pojem mnogoterosti se je počasi in naravno razvil iz del slavnih matematikov in fizikov kot so bili Gauss, Riemann, Klein, Poincaré, Einstein, Cartan, Chern in mnogi drugi. Analitične pojme in sredstva kot so odvajanje, integriranje, diferencialne enačbe, vektorska polja, diferencialne forme, Riemannova in Hermitska metrika... lahko naravno posplošimo z evklidskih prostorov na gladke mnogoterosti. Opremljene s temi analitičnimi sredstvi so mnogoterosti osnova za vrsto področij sodobne matematike, ter nepogrešljivo orodje v fiziki, mehaniki, astronomiji in drugih področjih naravoslovja in tehnike.

Knjiga je zamišljena kot uvod v teorijo gladkih mnogoterosti. Predpostavlja se poznavanje osnov matematične analize in topologije v obsegu predmetov na študijskem programu 1.stopnje Matematika na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani.

I.2 Topološke mnogoterosti

II.1 Mnogoterosti brez roba, osnovni primeri

Naj bo $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ nenegativno naravno število. Modelna n-dimenzionalna mnogoterost (brez roba) je evklidski prostor $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1. Topološki prostor X se imenuje *n-razsežna topološka mnogoterost*, če je X

(a) *Hausdorffov*;

(b) *lokalno evklidski dimenzije n*, to je, za vsako točko $p \in X$ obstaja odprta okolica $U \subset X$ in homeomorfizem $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ na neko odprto množico v $\mathbb{R}^n$;

(c) 2-*števen*, to je, obstaja števna baza topologije.

Število n v definiciji 1 se imenuje *dimenzija* mnogoterosti X, $n = \dim X$. Iz definicije sledi, da je 0-razsežna mnogoterost končna ali števna množica z diskretno topologijo.

Dimenzija je enolično določena, kar sledi iz naslednjega izreka.

Izrek 1 (Brouwer(1911))**.** *Neprazna odprta množica v $\mathbb{R}^n$ ni homeomorfna nobeni odprti množici v $\mathbb{R}^k$, če je $k \neq n$.*

Vsak homeomorfizem $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ kot v točki (b) se imenuje *lokalna karta* na X, inverzna preslikava $\varphi^{-1}\colon U' = \varphi(U) \to U$ pa je *lokalna parametrizacija* podmnožice $U \subset X$. Družina $\mathcal{U} = \{(U_j, \varphi_j)\colon j \in \mathcal{J}\}$ lokalnih kart na topološki mnogoterosti X, za katero velja $\bigcup_{j\in\mathcal{J}} U_j = X$, se imenuje *topološki atlas* na X.

Ogledali si bomo nekaj osnovnih primerov mnogoterosti.

Primer 1. Modelna n-dimenzionalna mnogoterost je evklidski prostor $\mathbb{R}^n$. Vsaka odprta podmnožica $X \subset \mathbb{R}^n$ je mnogoterost; inkluzija $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ je lokalna (in tudi globalna) karta na X.

Primer 2. *Sfera*

$$S^n = \left\{ x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=0}^{n} x_j^2 = 1 \right\}. \tag{I.2.1}$$

Za vsak $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ označimo z $U_j^{\pm}$ hemisferi:

$$U_j^+ = \{x \in S^n : x_j > 0\}, \qquad U_j^- = \{x \in S^n\colon x_j < 0\}.$$

Označimo s $\pi_j\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ projekcijo

$$\pi_j(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

(Strešica na x_j pomeni, da smo to spremenljivko izpustili.) Zožitev projekcije π_j na množici $U_j^\pm$ podaja lokalni karti

$$\phi_j^\pm = \pi_j|_{U_j\pm}\colon U_j^\pm \to \mathbb{R}^n.$$

Očitno je $\phi_j^\pm(U_j^\pm)$ enotna krogla $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. Inverz te preslikave je

$$(\phi_j^\pm)^{-1}\colon B(0,1) \to U_j^\pm, \quad (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_j, \pm\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_{j+1}, \ldots, y_n).$$

Ker je unija teh kart enaka $\bigcup\limits_{j=0}^{n} U_j^\pm = S^n$, je ta družina atlas na S^n.

Primer 3. *Sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (I.2.1) s stereografsko projekcijo.* Naj bodo $(x_1, \ldots, x_n, u)$ koordinate na $\mathbb{R}^{n+1}$. Označimo z $N = (0, \ldots, 0, 1)$ in $S = (0, \ldots, 0, -1)$ severni in južni pol sfere. Stereografska projekcija iz N oziroma S na hiperravnino $\{u = 0\} \cong \mathbb{R}^n$ nam da karti

$$\phi\colon S^n \setminus \{N\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n, \qquad \psi\colon S^n \setminus \{S\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n,$$

podani z naslednjima formulama:

$$\phi(x_1, \ldots, x_n, u) = \frac{1}{1-u}(x_1, \ldots, x_n), \qquad \psi(x_1, \ldots, x_n, u) = \frac{1}{1+u}(x_1, \ldots, x_n).$$

Primer 4. *Riemannova sfera.* Posebej si oglejmo 2-sfero S^2. Ravnino $\mathbb{R}^2$ s koordinatama (x, y) identificirajmo s kompleksno ravnino $\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y\colon x, y \in \mathbb{R}\}$. Prehodna preslikava med obema kartama iz primera 3 je enaka

$$\psi \circ \phi^{-1}(z) = 1/\bar{z}, \qquad z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Če nadomestimo $\psi = \psi_1 + \mathrm{i}\psi_2$ s kompleksno konjugirano karto $\bar{\psi} = \psi_1 - \mathrm{i}\psi_2$, dobimo na S^2 atlas $(S^2 \setminus \{N\}), \phi)$, $(S^2 \setminus \{S\}), \bar{\psi})$ s holomorfno prehodno preslikavo

$$\bar{\psi} \circ \phi^{-1}(z) = \frac{1}{z}, \qquad z \in \mathbb{C}^*.$$

Torej je karti $\phi, \bar{\psi}$ definirata kompleksni atlas na S^2 (glej . Sfera S^2, opremljena s tem kompleksnim atlasom, se imenuje *Riemannova sfera.*

Primer 5. Podmnogoterosti v evklidskem prostoru. Poseben primer: hiperploskve.
Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $f\colon D \to \mathbb{R}$ gladka funkcija (vsaj razreda $\mathcal{C}^1$). Množica

$$X = \{x \in D\colon f(x) = 0\} = f^{-1}(c)$$

se imenuje *nivojnica* funkcije f. Primer nivojnice je sfera:

$$S^n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} x_j^2 - 1 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Vprašanje je, pri katerih pogojih na f je nivojnica X mnogoterost. Zadovoljiv zadosten pogoj nam podaja izrek o implicitni funciji (glej razdelek I.6).

II.2 Mnogoterosti z robom

Sedaj bomo uvedli še pojem mnogoterosti z robom. Modelni prostor je v tem primeru zaprta zgornja polravnina:

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Njen *rob* je hiperravnina

$$\partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{H} \colon x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}.$$

Definicija 2. Topološki prostor X je *topološka n-dimenzionalna mnogoterost z robom*, če je X Hausdorffov, 2-števen in ima vsaka točka $p \in X$ odprto okolico $U \subset X$ in homeomorfizem $\varphi\colon U \to U'$ na neko odprto množico $U' \subset \mathbb{H}^n$.

Točke $p \in X$ mnogoterosti z robom klasificiramo na *notranje* in *robne* točke. Naj bo $\varphi\colon U \to \mathbb{H}^n$ lokalna karta na X v neki okolici $p \in U \subset X$. Imamo naslednji dve možnosti:

1. primer: $\varphi(p) \in \mathring{\mathbb{H}}^n = \{x \in \mathbb{H}^n \colon x_n > 0\}$. Če okolico U točke p primerno zmanjšamo, velja $\varphi(U) \subset \mathring{\mathbb{H}}^n$, zato je $\varphi(U)$ odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$. Taki točki $p \in X$ pravimo *notranja točka* mnogoterosti X.

2. primer: $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{H} \colon x_n = 0\}$, $\varphi_n(p) = 0$. Taki točki pravimo *robna točka* mnogoterosti X.

Klasifikacija točk na notranje in robne je neodvisna od izbora lokalne karte, kar sledi iz naslednjega izreka.

Izrek 2 (Brouwer). *Če je U odprta podmnožica $\mathbb{R}^n$ in je $\theta\colon U \to \theta(U)$ homeomorfizem na neko podmnožico $\theta(U) \subset \mathbb{R}^n$, potem je $\theta(U)$ odprta v $\mathbb{R}^n$.*

Če je θ difeomorfizem, je to očitna posledica izreka o inverzni preslikavi.

Sedaj si oglejmo prehodno preslikavo med dvema kartama na mnogoterosti z robom X:

$$\theta = \varphi^{-1} \circ \psi\colon V' \xrightarrow{\cong} U'.$$

Iz Brouwerjevega izreka sledi, da θ preslika $V' \cap \mathring{\mathbb{H}}^n$ na $U' \cap \mathring{\mathbb{H}}^n$ ter $V' \cap \partial\mathbb{H}^n$ na $U' \cap \partial\mathbb{H}^n$. To pomeni, da je vsaka točka $p \in X$, ki je notranja glede na neko lokalno karto, tudi notranja glede na poljubno lokalno karto. Analogen sklep velja za robne točke.

Množico vseh notranjih točk mnogoterosti X označimo z $\mathring{X}$ in jo imenujemo *notranjost*, množico vseh njenih robnih točk pa z ∂X in jo imenujemo *rob mnogoterosti X*.

Naj bo $p \in \partial X$ robna točka in (U, φ) lokalna karta. Njena zožitev

$$\varphi|_{U\cap\partial X} \colon U \cap \partial X \longrightarrow U' \cap \partial\mathbb{H}^n$$

je lokalna karta na ∂X z vrednostmi v $\partial\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Odtod sledi

Posledica 1. *Če je X topološka mnogoterost dimenzije n z robom, potem je njen rob ∂X topološka mnogoterost brez roba dimenzije $n-1$.*

Primer 6. Naj bo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gladka funkcija in $c \in \mathbb{R}$ neka njena *regularna vrednost.* To pomeni, da je diferencial $df_x \neq 0$ neizrojen v poljubni točki x na novojnici $f(x) = c$. Tedaj je množica

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \leq c\}$$

n-dimenzionalna mnogoterost z robom $\partial X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) = c\}$. (Glej izrek o implicitni funkciji, razdelek I.6.)

II.3 Topološke lastnosti mnogoterosti

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj bistvenih topoloških lastnosti mnogoterosti.

Izrek 3. *Vsaka topološka mnogoterost je:*

(a) lokalno povezana (vsaka točka ima bazo povezanih okolic);

(b) lokalno kompaktna (vsaka točka ima kompaktno okolico);

(c) števno kompaktna: $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, kjer so množice K_j kompaktne in velja $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$;

(d) normalna (vsak par disjunktnih zaprtih množic lahko ločimo z disjunktnima odprtima množicama; ker je Hausdorffova, sledi separacijska lastnost T_4);

(e) metrizabilna (obstaja metrika na X, ki inducira topologijo na X);

(f) parakompaktna.

Spomnimo se, da je topološki prostor X *parakompakten*, če za vsako odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ obstaja lokalno končno včrtano pokritje $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$. To pomeni:

- $\forall \beta\ \exists\, \alpha = \alpha(\beta)$, da je $V_\beta \subseteq U_\alpha$, in
- vsaka točka $p \in X$ ima okolico $U \subset X$, za katero je presek $U \cap V_\beta$ neprazen za največ končno različnih indeksov β.

Dokaz. Lastnosti (a) in (b) sta očitni posledici definicije.

Lastnost (c) sledi iz (b) ter 2-števnosti, saj ima X števno bazo odprtih množic $\{V_i \colon i \in \mathcal{I}\}$, tako da je $\overline{V}_i$ kompakt. Množice $K_j = \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_j$ sestavljajo naraščajoče zaporedje kompaktov

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = X.$$

Kompakte K_j lahko izberemo tako, da velja $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ za vsak $j = 1, 2, \ldots$; takemu zaporedju pravimo *normalno izčrpanje* mnogoterosti X.

Lastnost (d) sledi iz dejstva, da je vsak lokalno kompakten in števno kompakten Hausdorffov prostor tudi normalen.

Lastnost (e) sledi iz (d) in *Urysohnovega metrizacijskega izreka* (glej Kelley, General Topology, str. 125):

Izrek 4. *Vsak regularen prostor, ki je 2-števen, je homeomorfen nekemu podprostoru v Hilbertovi kocki* $[0,1]^\infty$ *(števen kartezičen produkt intervalov* $[0,1]$*).*

Lahko je videti, da je funkcija $d\colon [0,1]^\infty \times [0,1]^\infty \to \mathbb{R}_+$,

$$d((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |x_j - y_j|,$$

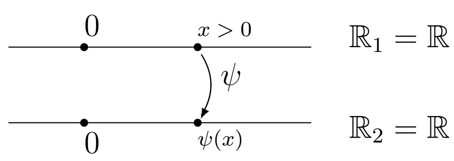
metrika na $[0,1]^\infty$; njena zožitev poljubno podmnožico $X \subset [0,1]^\infty$ je metrika na X.

(e) $\Rightarrow$ (f): Glej Kelley, General Topology, str. 160. □

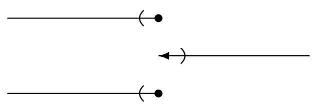
II.4 Posplošitve pojma mnogoterosti

Če iz definicije mnogoterosti izpustimo Hausdorffovo lastnost, dobimo t.i. *ne-Hausdorffovo mnogoterost* – topološki prostor, ki je lokalno evklidski in 2-števen. Primeri ne-Hausdorffovih mnogoterosti se naravno pojavijo v teoriji foliacij.

Oglejmo si konkreten primer. Naj bo $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ neka zvezna strogo naraščajoča funkcija, $\psi(0) = 0$. Lahko npr. vzamemo $\psi(t) = t$.



Definiramo ekvivalenčno relacijo: če je $x \in \mathbb{R}_1$ in $y \in \mathbb{R}_2$, potem je $x \sim y$ natanko tedaj, ko je $x > 0$ in $y = \psi(x) > 0$. Kvocientni prostor $X/\sim$ je ne-Hausdorffova eno-dimenzionalno mnogoterost, ki jo ponazarja naslednja slika:



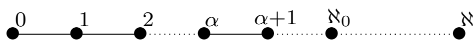
Primere ne-Hausdorffovih mnogoterosti najdemo tudi v prostorih zarodkov zveznih ali gladkih funkcij. Naj bo X topološka mnogoterost. *Zarodek funkcije* v točki $x \in X$ je določen s parom (U, f), kjer je $U \subset X$ neka odprta množica, ki vsebuje točko x in je $f\colon U \to \mathbb{R}$ funkcija. Dva para (U, f) in (V, g) sta ekvivalentna (oziroma določata isti zarodek) v točki x natanko tedaj, ko obstaja okolica $x \in W \subset U \cap V$, tako da je $f|_W = g|_W$. Zarodek funkcije f v točki x označimo $[f]_x$.

Oglejmo si naslednji par gladkih funkcij na $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \mathrm{e}^{-1/x}, & x > 0. \end{cases} \\
g(x) &= 0.
\end{aligned}
$$

Očitno velja $[f]_x = [g]_x$ natanko tedaj, ko je $x < 0$. Množica vseh zarodkov $\{[f]_x, [g]_x \colon x \in \mathbb{R}\}$ je ne-Hausdorffova 1-dimenzionalna mnogoterost.

Iz definicije mnogoterosti bi lahko izpustili tudi aksiom o 2-števnosti. Primer take mnogoterosti je *dolga premica*, ki jo dobimo takole. Vzamemo vsa ordinalna števila do števila $\aleph$ (slednji predstavlja množico vseh realnih števil $\mathbb{R}$). Za vsako ordinalno število α obstaja njegov naslednik $\alpha + 1$. Med njima je interval $[\alpha, \alpha + 1]$, homeomorfen intervalu $[0, 1]$.



Unija vseh intervalov $[\alpha, \alpha + 1]$ je enodimenzionalna mnogoterost, ki ni 2-števna.

I.3 Gladke in kompleksne mnogoterosti

V tem razdelku bomo uvedli pojem gladkih, realno analitičnih in kompleksnih mnogooterosti. Najprej si oglejmo ustrezne funkcijske prostore.

III.1 Gladke in holomorfne funkcije

Naj bo D neka odprta množica v $\mathbb{R}^n$. Za vsako število $r \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ označimo s $\mathcal{C}^k(D)$ prostor vseh k-krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij na D; $\mathcal{C}^0(D) = \mathcal{C}(D)$ je prostor vseh zveznih funkcij na D. Očitno velja

$$\mathcal{C}^0(D) \supset \mathcal{C}^1(D) \supset \mathcal{C}^2(D) \supset \ldots \supset \bigcap_{r=0}^{\infty} \mathcal{C}^r(D) = \mathcal{C}^\infty(D),$$

pri čemer so vse inkluzije stroge.

Funkcija f na D je *realno analitična*, če je v neki okolici poljubne točke $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ enaka vsoti neke potenčne vrste:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} c_{k_1,\ldots,k_n}(x_1 - a_1)^{k_1} \cdots (x_n - a_n)^{k_n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} c_k (x-a)^k.$$

Seveda je to ravno Taylorjeva vrsta funkcije f v točki a.

$\mathcal{C}^\omega(D)$ označuje prostor vseh realno analitičnih funkcij. Velja $\mathcal{C}^\omega(D) \subsetneq \mathcal{C}^\infty(D)$.

Vsi navedeni prostori so neskončno razsežni realni vektorski prostori (vsota funkcij ter produkt s skalarjem) ter algebre (produkt funkcij).

Ponovimo še pojem holomorfne funkcije. Modelna n-dimenzionalna kompleksna mnogoterost je kompleksni evklidski prostor $\mathbb{C}^n$, kartezični produkt n kopij kompleksne ravnine $\mathbb{C}$. Naj bodo $z = (z_1, \ldots, z_n)$ kompleksne koordinate na $\mathbb{C}^n$, $z_j = x_j + \mathfrak{i}\, y_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{i} = \sqrt{-1}$. Za vsako diferenciabilno kompleksno funkcijo $f = u + \mathfrak{i}v \colon D \to \mathbb{C}$ na neki domeni $D \subset \mathbb{C}^n$ je diferencial df_a v poljubni točki $a \in D$ realno-linearna preslikava $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Razcepimo jo na vsoto $\mathbb{C}$-linearnega dela ∂f in $\mathbb{C}$-antilinearnega dela $\overline{\partial} f$:

$$df = \partial f + \overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}\, dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j. \tag{I.3.1}$$

Pri tem je $dz_j = dx_j + \mathfrak{i}\, dy_j$, $d\bar{z}_j = dx_j - \mathfrak{i} dy_j$ in

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mathfrak{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \mathfrak{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right). \tag{I.3.2}$$

Definicija 3. Diferenciabilna funkcija $f \colon D \to \mathbb{C}$ na domeni $D \subset \mathbb{C}$ je *holomorfna*, če velja $df = \partial f$ na D; to je, diferencial $df_a \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ v poljubni točki $a \in D$ je $\mathbb{C}$-linearna preslikava.

V primeru $n = 1$ je diferencial df_a kompleksno linearen natanko tedaj, ko je f kompleksno odvedljiva v točki a, to je, ko obstaja njen kompleksni odvod

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Diferencial je tedaj enak $df_a(h) = f'(a)h$, $h \in \mathbb{C}$. Pišemo $df_a = f'(a)\, dz$, kjer je $dz = dx + \mathfrak{i}dy$.

V splošnem je funkcija $f(z_1, \ldots, z_n)$ holomorfna natanko tedaj, ko velja

$$\overline{\partial} f = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad \text{for } j = 1, \ldots, n.$$

Pišimo $f = u + \mathrm{i}v$, kjer sta u in v realni funkciji. Enačba $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$ je ekvivalentna Cauchy-Riemannovemu sistemu

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j}. \tag{I.3.3}$$

Po izreku Hartogsa je funkcija $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ holomorfna natanko tedaj, ko je *separatno holomorfna* v smislu, da je za vsako točko $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ in za vsak $j = 1, \ldots, n$ funkcija

$$\mathbb{C} \ni \zeta \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + \zeta, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

holomorfna na množici $\{\zeta \in \mathbb{C} \colon (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + \zeta, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in D\}$. Netrivialno je dokazati, da je vsaka separatno holomorfna funkcija zvezna. Iz separatne holomorfnosti ter zveznosti dobimo s pomočjo večkratne uporabe običajne Cauchyjeve integralne formule naslednjo Cauchyjevo integralno formulo na vsakem polidisku

$$P(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n \colon |z_j - a_j| < r_j,\ j = 1, \ldots, n\}, \quad r = (r_1, \ldots, r_n) \in (0, \infty)^n,$$

z zaprtjem $\overline{P(a, r)} \subset D$:

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^n} \int_{|\zeta_1 - z_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_n - z_n| = r_n} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}.$$

Z razvojem n-ternega Cauchyjevega jedra $C(z, \zeta) = 1/(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)$ v geometrijsko vrsto okrog a dobimo s pomočjo členske integracije razvoj holomorfne funkcije v konvergentno potenčno vrsto na poljubnem polidisku $P(a, r) \subset D$:

$$f(z) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} c_{k_1, \ldots, k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} c_k (z - a)^k.$$

Pomembno je, da zgornja vrsta ne vsebuje nobenih členov oblike $\overline{z_j - a_j}$.

Označimo z $\mathcal{O}(D)$ prostor vseh holomorfnih funkcij na D. Standardna oznaka $\mathcal{O}$ je po japonskem matematiku z imenom *Kiyoshi Oka*, enem od pionirjev kompleksne analize v več spremenljivkah.

III.2 Gladke mnogoterosti brez roba

Naj bo X n-dimenzionalna topološka mnogoterost brez roba in $\mathcal{U} = \{(U_j, \varphi_j) \colon j \in \mathcal{J}\}$ nek atlas na X.

Definicija 4. Topološki atlas $\mathcal{U} = \{(U_j, \varphi_j) \colon j \in \mathcal{J}\}$ na X se imenuje $\mathcal{C}^r$-*atlas* ($r \in \{1, \ldots, \infty, \omega\}$), če je za vsak par indeksov $i, j \in \mathcal{J}$ prehodna preslikava $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} =: \varphi_{ij}$ $\mathcal{C}^r$ difeomorfizem na svoji domeni.

V primeru, ko je $U_i \cap U_j = \emptyset$, je pogoj na prazno izpolnjen. Če pa je $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$, mora biti prehodna preslikava

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \colon \varphi_j(U_{ij}) \longrightarrow \varphi_i(U_{ij})$$

$\mathcal{C}^r$ difeomorfizem med domenama v $\mathbb{R}^n$ (to je, φ_{ij} ter njen inverz $\varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji}$ sta preslikavi razreda $\mathcal{C}^r$). Pravimo tudi, da sta karti (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) na X $\mathcal{C}^r$-kompatibilni.

Družina prehodnih preslikav očitno zadošča naslednjim trem pogojem na ustreznih domenah:

- $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}$ na U_i;
- $\varphi_{ij} \circ \varphi_{ji} = \mathrm{Id}$ $(\Leftrightarrow \varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji})$;
- $\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ki} = \mathrm{Id}$ $(\Leftrightarrow \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik}$.

Družina difeomorfizmov $\{\varphi_{ij}\}$ s temi lastnostmi se imenuje *1-kocikel difeomorfizmov* na pokritju $\{U_j\}$.

Definicija 5. $\mathcal{C}^r$ atlasa $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ ter $\mathcal{V} = \{(V_j, \psi_j)\}$ na topološki mnogoterosti X sta med seboj $\mathcal{C}^r$ *ekvivalentna* (ali $\mathcal{C}^r$ *kompatibilna*), če je njuna unija $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ spet $\mathcal{C}^r$ atlas.

Očitno sta atlasa $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ $\mathcal{C}^r$ ekvivalentna natanko tedaj, ko je vsaka karta $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{U}$ $\mathcal{C}^r$ kompatibilna z vsako karto $(V_j, \psi_j) \in \mathcal{V}$. Ni težko videti, da je $\mathcal{C}^r$-ekvivalenca ekvivalenčna relacija na množici vseh topoloških atlasov na dani mnogoterosti X.

Definicija 6. $\mathcal{C}^r$ *struktura*, ali *struktura* $\mathcal{C}^r$ *mnogoterosti*, na topološki mnogoterosti X je določena z izborom ekvivalenčnega razreda $\mathcal{C}^r$-atlasa.

Ekvivalentno: $\mathcal{C}^r$ struktura na X je določena z izborom maksimalnega $\mathcal{C}^r$-atlasa na X, to je unija vseh $\mathcal{C}^r$ atlasov v nekem ekvivalenčnem razredu.

Naloga. Naj bo $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ atlas na n-sferi $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, definiran s stereografsko projekcijo. (Glej primer 3 na str. 3.) Pokaži, da ta atlas definira na S^n isto realno-analitično strukturo kot atlas $\{(U_j^{\pm}, \varphi_j^{\pm}), j = 0, \ldots, n\}$ iz primera 2 na str. 2.

III.3 Gladke mnogoterosti z robom

Definicijo 4 lahko uporabimo tudi za atlase na topološki mnogoterosti z robom. Tako dobimo pojem $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti z robom.

Prehodna preslikava $\varphi_{\alpha\beta}$ med poljubnima kartama v danem $\mathcal{C}^r$ atlasu je difeomorfizem med odprtimi podmnožicami v zaprti zgornjo polravnini $\mathbb{H}^n = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \colon y_n \geq 0\}$. Iz izreka o inverzni preslikavi sledi, da je difeomorfizem odprta preslikava, kar pomeni, da je slika odprte množice v $\mathbb{R}^n$ spet odprta množica v $\mathbb{R}^n$. Torej preslika $\varphi_{\alpha\beta}$ notranjost $\mathring{V} = V \cap \{y_n > 0\}$ v notranjost $\varphi_{\alpha\beta}(V) \cap \{y_n > 0\}$ ter rob $V \cap \{y_n = 0\}$ v rob $\varphi_{\alpha\beta}(V) \cap \{y_n = 0\}$.

Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ $\mathcal{C}^r$-atlas na mnogoterosti z robom $(X^n, \partial X)$. Družina vseh kart $(U_\alpha \cap \partial X, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial X})$, kjer je

$$\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial X} \colon \underbrace{U_\alpha \cap \partial X}_{\text{odprta v } \partial X} \to \underbrace{\varphi_\alpha(U_\alpha)}_{\subset \mathbb{H}^n} \cap \underbrace{\{y_n = 0\}}_{= \mathbb{R}^{n-1}}$$

je očitno $\mathcal{C}^r$ atlas na ∂X, ki definira na ∂X strukturo $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti dimenzije $n-1$.

III.4 Kompleksne mnogoterosti

Označimo koordinate na $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ z

$$\mathbb{R}^{2n} \ni (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \rightsquigarrow (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Kompleksna struktura na topološki mnogoterosti X^{2n} je podana z atlasom

$$\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in \mathcal{I}\}$$

$$\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to U'_\alpha \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n,$$

tako da so vse prehodne preslikave

$$\varphi_{\alpha\beta} \colon \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$$

biholomorfne (to je bijektivne, holomorfne in s holomorfnim inverzom).

Definicija 7. Kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije n je topološka mnogoterost X realne dimenzije $2n$ skupaj z izborom kompleksne strukture (ekvivalentno, skupaj z izborom ekvivalenčnega razreda kompleksnih atlasov na X).

Kompleksno dimenzijo označimo z $\dim_{\mathbb{C}} X$. Velja torej $\dim_{\mathbb{R}} X = 2 \dim_{\mathbb{C}} X$.

Očitni primeri holomorfnih funkcij na podmnožici v $\mathbb{C}^n$ so polinomi v $z_1, \ldots, z_n$ (holomorfni polinomi) ter racionalne funkcije $\frac{P}{Q}$, kjer sta P, Q polinoma (slednja je holomorfna na množici $Q \neq 0$). Kompleksna mnogoterost z atlasom, ki ima za prehodne preslikave racionalne funkcije, se imenuje *kompleksno algebraična mnogoterost*.

I.4 Primeri gladkih in kompleksnih mnogoterosti

IV.1 Riemannove ploskve

Naj bo X kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$. Kompleksne mnogoterosti dimenzije 1 se imenujejo Riemannove ploskve. To so npr. domene v $\mathbb{C}$, Riemannova sfera: $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ (topološko 2-sfera). Kompleksen atlas na 2-sferi $S^2 = S$:

$$\text{atlas na } S^2 \begin{cases} U = S \setminus \{(0,0,1)\} \underset{\cong}{\xrightarrow{\varphi}} \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \\ V = S \setminus \{(0,0,-1)\} \underset{\cong}{\xrightarrow{\psi}} \mathbb{C} \end{cases} \quad \text{(stereografska projekcija)}$$

ψ preslika severni pol $(0,0,1)$ v $(0,0)$
$\psi \colon S \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
φ preslika južni pol $(0,0,-1)$ v $(0,0)$
$\varphi \colon S \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Prehodna preslikava je $\overline{\varphi} \circ \psi^{-1}$ in velja

$$(\overline{\varphi} \circ \psi^{-1})(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \quad \text{za } \zeta = x + iy \in \mathbb{C}^*.$$

To je biholomorfna preslikava $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$.
S s to strukturo se imenuje Riemannova sfera, ali tudi $\mathbb{CP}^1$ - enodimenzionalna kompleksna projektivna ravnina.

$$S = (\mathbb{C} \sqcup \mathbb{C})/_{\zeta \sim \frac{1}{\zeta}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

IV.2 Kartezični produkt gladkih mnogoterosti

Če sta X^n in Y^m mnogoterosti, je $X \times Y$ mnogoterost dimenzije $n+m$. Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ $\mathcal{C}^r$-atlas na X in $\mathcal{V} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ $\mathcal{C}^r$-atlas na Y. Atlas na $X \times Y$ je potem $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$, kjer je $\varphi_\alpha \times \psi_\beta$ definirana na naslednji način: če je $x \in U_\alpha$ in $y \in V_\beta$, potem

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(x,y) = (\underbrace{\varphi_\alpha(x)}_{=u}, \underbrace{\psi_\beta(y)}_{=v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}.$$

Prehodne preslikave so oblike $(u,v) \mapsto (\varphi_{\alpha\alpha'}(u), \psi_{\beta\beta'}(v))$, torej so $\mathcal{C}^r$ difeomorfizmi. Tak atlas na $X \times Y$ se imenuje produktni atlas. Kartezični produkt $X \times Y$ dveh $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti, opremljen s produktnim atlasom, je torej $\mathcal{C}^r$ mnogoterost.

Enako vidimo, da je produkt $X \times Y$ dveh kompleksnih mnogoterosti spet kompleksna mnogoterost in velja $\dim_{\mathbb{C}} X \times Y = \dim_{\mathbb{C}} X + \dim_{\mathbb{C}} Y$.

Primer 7. $\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ je n-dim torus.

IV.3 Kvocientne mnogoterosti

Motivacija: $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \cong S^1$ (krožnica):

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to S^1 \subset \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Naj bo X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Potem se $X/_{\sim}$ imenuje kvocientni prostor.

$$\begin{array}{cc} X & \supset \pi^{-1}(U) \\ \pi \downarrow & \downarrow \pi \\ X/_{\sim} & \supset U^{odprta} \end{array}$$

Topologija na $X/_{\sim}$ je definirana na naslednji način: $U \subset X/_{\sim}$ je odprta $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset X$ je odprta. To je najmočnejša topologija na $X/_{\sim}$, da je π zvezna.

Velja: kvocientna projekcija π je odprta $\Leftrightarrow \sim$ je odprta relacija $\overset{def}{\Leftrightarrow} U^{odprta} \subset X \Rightarrow \{x \in X : x \sim y \text{ za nek } y \in U\} = \pi^{-1}(\pi(U))$ (saturacija množice U) je odprta.

Trditev 1. *Naj bo X Hausdorffov. Potem je $X/_{\sim}$ Hausdorffov natanko tedaj, ko je $\sim$ zaprta relacija, to je*

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times X : x \sim y\} \text{ (graf } \sim)$$

je zaprta množica v $X \times X$.

Dokaz. Vaje. □

V nadaljevanju gledamo ekvivalenčno relacijo $\sim$ na mnogoterosti X, ki je hkrati odprta in zaprta. Torej je kvocientna projekcija $\pi\colon X \to X/_{\sim}$ odprta preslikava ter je $X/_{\sim}$ Hausdorffov 2-števen topološki prostor. Zanimali nas bodo primeri, ko je $X/\sim$ spet mnogoterost. Najprej si oglejmo nekaj primerov.

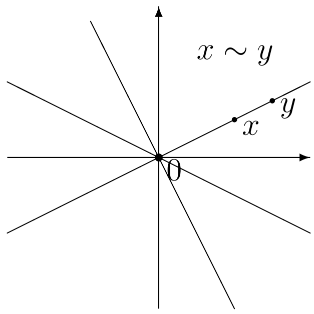
IV.4 Projektivni prostori

$$\begin{aligned} &\mathbb{RP}^n \text{ realni projektivni prostor dimenzije } n \\ &\mathbb{CP}^n \text{ kompleksni projektivni prostor dimenzije } \dim_{\mathbb{C}} = n \end{aligned}$$

Splošneje: če je V nek končnorazsežen realen ali kompleksen vektorski prostor, definiramo njegovo projektivizacijo $\mathbb{P}(V)$ kot množico vseh 1-dim vektorskih podprostorov v V.

$$\begin{aligned} \mathbb{RP}^n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) &= \text{ množica vseh realnih premic (realnih enorazsežnih podprostorov) v } \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathbb{CP}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) &= \text{ množica vseh kompleksnih premic v } \mathbb{C}^{n+1} \end{aligned}.$$

Na $\mathbb{R}^{n+1}_* = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$:
$x = (x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x$ in y sta kolinearna $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$, da je $y = tx$



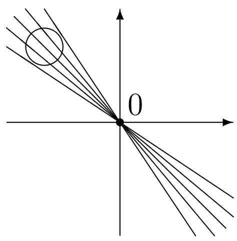
$\sim$ je ekvivalenčna relacija, dobimo:

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{RP}^n = \mathbb{R}_*^{n+1}/_{\sim} \end{array}$$

$\sim$ je odprta: naj bo $U^{odprta} \subset \mathbb{R}_*^{n+1}$. Potem je

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_*} tU \quad \text{(stožec nad } U)$$

odprta.



Graf $\sim$ je množica

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_*^{n+1} \times \mathbb{R}_*^{n+1} : \sum_{j,k=0,\ldots,n} |x_j y_k - x_k y_j|^2 = 0\}$$

in je zaprta (ker ničla zvezne funkcije). Torej je $\mathbb{RP}^n$ Hausdorffov.

Kompaktnost: S^n naj bo enotna sfera v $\mathbb{R}^{n+1}$. Potem lahko definiramo $\mathbb{RP}^n$ kot $\mathbb{RP}^n = \pi(S^n) = S^n/_{x \sim -x}$, torej je $\mathbb{RP}^n$ kompakten.

$$\begin{array}{c} S^n \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow{\scriptstyle \text{2-listna projekcija}} \\ \mathbb{RP}^n \end{array}$$

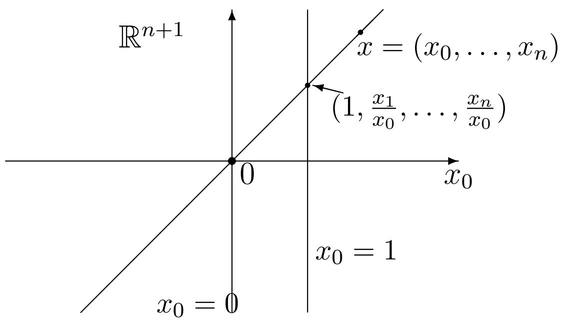
Analogni zaključki za $\mathbb{CP}^n$:

$$
\begin{array}{ccll}
S^1 & \hookrightarrow & S^{2n+1} & \subset \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2} \\
 & & \downarrow \pi & \text{(Hopfova fibracija)} \\
 & & \mathbb{CP}^n & \text{realno-analitičen svežnj z vlaknom } S^1
\end{array}
$$

Če $n = 1$:

$$
\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, hook] & S^3 \arrow[d] \\
 & \mathbb{CP}^1 = S^2
\end{tikzcd}
$$

Atlas na $\mathbb{RP}^n$ ter $\mathbb{CP}^n$:



$$x \in V_j = \{(x_0, \ldots, x_n) \colon x_j \neq 0\} \xrightarrow{\pi} U_j \subset \mathbb{RP}^n$$

$$\pi(x) = [x] \in U_j \text{ (ekvivalenčni razred od } x)$$

Definiramo $\varphi_j \colon U_j \to \mathbb{R}^n$ kot

$$\varphi_j([x]) = \varphi_j([x_0 \colon x_1 \colon \ \ldots \colon x_n]) \overset{def}{=} \left(\frac{x_0}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j} \right)$$

φ_j je dobro definirana:

$$
\begin{aligned}
[x_0 \colon \ \ldots \colon x_n] = [y_0 \colon \ \ldots \colon y_n] &\Leftrightarrow y_j = t x_j \ \forall j = 0, \ldots, n \, \forall t \in \mathbb{R}_* \\
&\Rightarrow \tfrac{y_k}{y_j} = \tfrac{t x_k}{t x_j} = \tfrac{x_k}{x_j} \ \forall j \\
&\Rightarrow \varphi_j([x_0 \colon \ \ldots \colon x_n]) = \varphi_j([y_0 \colon \ \ldots \colon y_n])
\end{aligned}
$$

Preveri, da je to $\mathcal{C}^\omega$-atlas na $\mathbb{RP}^n$ in holomorfen atlas na $\mathbb{CP}^n$.

$\mathbb{P}^n$ vsebuje veliko linearno vloženih prostorov $\mathbb{P}^k$, $1 \leq k < n$ (to velja za realne in kompleksne). Izberemo nek $(k+1)$-dimenzionalen linearen podprostor $\Sigma \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1}_* & \hookleftarrow & \Sigma \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{CP}^n & \hookleftarrow & \mathbb{P}(\Sigma) \cong \mathbb{CP}^k \end{array}$$

Kompleksne premice v Σ so točke v $\mathbb{P}(\Sigma) \cong \mathbb{CP}^k$.

Če je $k = n-1$: Σ je hiperravnina v $\mathbb{C}^{n+1}$, podana z eno linearno enačbo: $a_0 z_0 + \ldots + a_n z_n = 0$ (vsaj en $a_j \neq 0$). Prirejena projektivna hiperravnina v $\mathbb{CP}^n$ je

$$\mathbb{P}(\Sigma) = \{[z_0 \colon z_1 \colon \ldots \colon z_n] \in \mathbb{CP}^n \colon \sum_{j=0}^{n} a_j z_j = 0\}.$$

Opomba. Definicija je dobra, t.j., neodvisna od predstavnika ekvivalenčnega razreda, saj se multiplikativen faktor $t \in \mathbb{C}_*$ krajša.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^n & \cong & \{z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{CP}^n \\ & \cong & \{[z_0 \colon z_1 \colon \ldots \colon z_n] : z_0 \neq 0\} \\ & & \quad\downarrow \\ & & \left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right) \quad \in \mathbb{C}^n \\ & & \quad || \\ & & (\zeta_1, \ldots, z_n) \quad \text{koordinate na } \mathbb{C}^n \end{array}$$

Sedaj bomo na preprostem primeru opisali pojem *projektivnega zaprtja.* Vzemimo neko afino linearno hiperravnino $L \subset \mathbb{C}^n$:

$$L\colon \quad \sum_{j+1}^{n} a_j \zeta_j + a_0 = 0$$

Kaj je $\overline{L} \subset \mathbb{CP}^n$? Homogeniziramo oz. projektiviziramo: pišemo $\zeta_j = \frac{z_j}{z_0}$, kjer so $[z_0 \colon \ldots \colon z_n]$ homogene koordinate na $\mathbb{CP}^n$. Vstavimo v enačbo za L:

$$\begin{array}{rl} & \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{z_j}{z_0} + a_0 = 0 \qquad | \cdot z_0 \\ \overline{L}\colon & \sum_{j=1}^{n} a_j z_j + a_0 z_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j z_j = 0 \quad \text{projektivna hiperravnina v } \mathbb{CP}^n \end{array}$$

"Točke v ∞" so

$$\overline{L} \cap \underbrace{\{z_0 = 0\}}_{\cong \mathbb{CP}^{n-1}} = \{[0 \colon z_1 \colon \ldots \colon z_n] \colon \sum_{j=1}^{n} a_j z_j = 0\} \qquad \text{hiperravnina v } \mathbb{CP}^{n-1} \cong \mathbb{CP}^{n-2}$$

Posplošitev: če je $P(z_0, \ldots, z_n) \not\equiv 0$ homogen polinom stopnje $d \in \mathbb{N}$, potem je množica

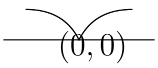
$$A_P = \{[z_0 \colon \ \ldots \colon z_n] \in \mathbb{CP}^n \colon P(z_0, \ldots, z_n) = 0\}$$

dobro definirana. A_P se imenuje projektivna algebraična hiperploskev stopnje d.

Lahko gledamo tudi množice, definirane z več homogenimi polinomskimi enačbami:

$$A_{P_1} \cap A_{P_2} \cap \ldots \cap A_{P_k} \qquad \text{projektivna algebraična podmnožica v } \mathbb{CP}^n$$

Primer 8. Naj bo $C = \{x^2 = y^3 \colon x, y \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$ kompleksna krivulja (afino algebraična).

Presek z $\mathbb{R}^2$ ima singularnost v $(0, 0)$: 

Projektiviziramo: $\overline{C} \subset \mathbb{CP}^2$

$$x = \tfrac{z}{\zeta}, \qquad y = \tfrac{w}{\zeta} \quad (\zeta \neq 0, z, w \in \mathbb{C})$$

$$\left(\tfrac{z}{\zeta}\right)^2 = \left(\tfrac{w}{\zeta}\right)^3$$

$$z^2\zeta = w^3 \qquad \text{homogena enačba}$$

$$\overline{C} = \{[\zeta \colon z \colon w] \in \mathbb{CP}^2 \colon z^2\zeta = w^3\}$$

$$\overline{C} \cap \underbrace{\{\zeta = 0\}}_{\cong \mathbb{CP}^1} = \{[0 \colon z \colon 0]\} = \{[0 \colon 1 \colon 0]\}$$

Lahko vidimo, da je presečno število krivulje $\overline{C}$ s premico v neskončnosti $\Lambda = \{\zeta = 0\}$ v točki $[0 \colon 1 \colon 0]$ enako 3 (pravimo tudi, da je to trojna presečna točka).

Opomba. *Lokalno presečno število* dveh kompleksnih krivulj v poljubni kompleksni ploskvi izračunamo tako, da lokalno definicijsko funkcijo ene krivulje (v našem primeru npr. funkcijo ζ, ki definira projektivno premico $\{\zeta = 0\} = \Lambda$) zožimo na drugo krivuljo (v našem primeru $\overline{C}$) in jo izrazimo v lokalni karti na drugi krivulji, v kateri presečni točki ustreza izhodišče. Presečno število je tedaj red ničle zožene funkcije v izhodišču.

V našem primeru je primerna lokalna koordinata na $\overline{C}$ funkcija w (saj presečni točki ustreza $w = 0$), zvezo med ζ in w (v lokalni karti $\{z = 1\}$ na $\mathbb{CP}^2$) pa nam podaja enačba $\zeta = w^3$. Red ničle funkcije ζ pri $w = 0$ je enako 3 in to je presečno število med $\overline{C}$ in Λ v točki $[0 \colon 1 \colon 0]$. Iz definicije sledi, da je presečno število dveh kompleksnih krivulj vselej pozitivno.

Globalno presečno število dveh krivulj je definirano kot vsota lokalnih presečnih števil v vseh presečnih točkah. Za krivulje v kompaktni komleksni ploskvi (kot npr. $\mathbb{CP}^2$) je to vselej nenegativno (končno) celo število. Krivulje v odprtih ploskvah (kot npr. $\mathbb{C}^2$) pa se lahko sekajo v števni diskretni množici točk in v tem primeru globalnega presečnega števila ni mogoče smiselno definirati.

Naloga. Dokaži, da je presečno število vsake kompleksne krivulje stopnje d v $\mathbb{CP}^2$ s katerokoli projektivno premico $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$ enako d, torej stopnji krivulje.

Konstrukcijo projektivizacije v zgornjem primeru lahko posplošimo takole. Če je

$$L = \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n \colon P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = 0\},$$

kjer je $P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ polinom stopnje d, ki ni nujno homogen, pišemo $\zeta_j = \frac{z_j}{z_0}$ in vstavimo v P:

$$\widetilde{P}(z_0, \ldots, z_n) = z_0^d P\left(\frac{z_j}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right) = 0$$

Dobljeni homogen polinom $\widetilde{P}$ stopnje d se imenuje *homogenizacija* polinoma P. Potem je množica

$$\overline{L} = \{[z_0 \colon \ldots \colon z_n] \in \mathbb{CP}^n \colon \widetilde{P}(z_0, \ldots, z_n) = 0\}$$

ravno zaprtje množice L v $\mathbb{CP}^n$.

I.5 Gladke funkcije in preslikave mnogoterosti

Naj bo X $\mathcal{C}^r$-mnogoterost, $r \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty, \omega, \mathcal{O}\}$, ter $f \colon X \xrightarrow{\text{zvezna}} \mathbb{R}$ (ali pa $f \colon X \to \mathbb{C}$ v primeru, da je X kompleksna mnogoterost).

Definicija 8. Zvezna funkcija f na mnogoterosti X je gladka razreda $\mathcal{C}^r$ (realno analitična v primeru $r = \omega$; holomorfna v primeru $r = \mathcal{O}$) v točki $p \in X$, če je za neko lokalno karto (U, φ) na X (iz atlasa, ki določa dano $\mathcal{C}^r$ strukturo na X), $p \in U$, funkcija

$$f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$$

gladka razreda $\mathcal{C}^r$ v neki okolici točke $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$. Funkcija f je razreda $\mathcal{C}^r$ na X,če je $\mathcal{C}^r$ v vsaki točki $p \in X$.

$$\begin{tikzcd}
p \in U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R} \\
\varphi(p) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \arrow[ur, "f\circ\varphi^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema 1. *Definicija je neodvisna od izbire lokalne karte v danem $\mathcal{C}^r$ atlasu.*

Dokaz. Naj bo (V, ψ) neka druga lokalna karta na X, $p \in V$.

$$\begin{tikzcd}
\psi(p) \in \mathbb{R}^n \arrow[dd, bend right=60, "\varphi\circ\psi^{-1}"'] \arrow[drr, "f\circ\psi^{-1}"] & & \\
p \arrow[u, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[rr, "f"] & & \mathbb{R} \\
\varphi(p) \in \mathbb{R}^n \arrow[urr, "f\circ\varphi^{-1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$f\psi^{-1} = f\varphi^{-1}\varphi\psi^{-1} = (f\varphi^{-1}) \circ \underbrace{(\varphi \circ \psi^{-1})}_{\substack{\text{prehodna preslikava,} \\ \mathcal{C}^r \text{ difeomorfizem}}}$$

Če je $f \circ \varphi^{-1}$ razreda $\mathcal{C}^r$, je tudi $f \circ \psi^{-1} = (f\varphi^{-1})(\varphi\psi^{-1})$ razreda $\mathcal{C}^r$, saj je kompozicija $\mathcal{C}^r$-preslikav med Evklidskimi prostori spet $\mathcal{C}^r$-preslikava. (Slednje lahko vidimo z uporabo verižnega pravila). Isti sklep velja v obratni smeri. $\square$

Definicijo posplošimo za preslikave.

Definicija 9. Naj bosta X, Y dve $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti. Zvezna preslikava $f \colon X \to Y$ je gladka razreda $\mathcal{C}^r$ v točki $p \in X$, če obstajata lokalni karti (U, φ) na X ter (V, ψ) na Y, tako da velja $p \in U$, $f(p) \in V$ in je preslikava $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ razreda $\mathcal{C}^r$ v neki okolici točke $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$. Preslikava je razreda $\mathcal{C}^r$ (na X), če je razreda $\mathcal{C}^r$ v vsaki točki iz X. Preslikava f je glada razreda $\mathcal{C}^r$ na X, če je $\mathcal{C}^r$ v vsaki točki.

$$\begin{tikzcd}
p \in U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & f(p) \in V \arrow[d, "\psi"] \\
\varphi(p) \in \mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi f \varphi^{-1}"] & \psi(f(p)) \in \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Lema 2. *Tudi ta definicija je neodvisna od izbire lokalnih kart na X oz. na Y.*

Dokaz. Naj bo (U', φ') neka druga karta na X, $p \in U'$, ter (V', ψ') neka druga karta na Y, $f(p) \in V'$. Potem velja:

$$\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} = \psi'\psi^{-1}\psi f \varphi^{-1}\varphi(\varphi')^{-1} = \underbrace{(\psi'\psi^{-1})}_{\substack{\text{prehodna preslikava na } Y, \\ \mathcal{C}^r \text{ difeomorfizem}}} \quad (\psi f \varphi^{-1}) \quad \underbrace{(\varphi(\varphi')^{-1})}_{\substack{\text{prehodna preslikava na } X, \\ \mathcal{C}^r \text{ difeomorfizem}}}$$

Sledi: če je $\psi f \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^r$, je tudi $\psi' f (\varphi')^{-1} \in \mathcal{C}^r$ in obratno. $\square$

Kategorija $\mathcal{C}^r$ ($r \in \{0, 1, \ldots, \infty, \omega\}$):

- objekti: $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti
- morfizmi: $\mathcal{C}^r$-preslikave

Kategorija $\mathcal{O}$**:**

- objekti: kompleksne mnogoterosti
- morfizmi: holomorfne preslikave

Opomba. Če sta X in Y $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti, sta avtomatično tudi $\mathcal{C}^k$ mnotogoterosti za vsak $k < r$. Torej lahko govorimo o $\mathcal{C}^k$ preslikavah $X \to Y$ za vsak $k \leq r$. Ne moremo pa smiselno definirati pojma $\mathcal{C}^k$-preslikave za $k > r$.

$\mathcal{C}^r(X, Y)$ je množica vseh $\mathcal{C}^r$-preslikav $X \to Y$.
$\mathcal{C}^r(X) \overset{def}{=} \mathcal{C}^r(X, \mathbb{R})$ je množica vseh $\mathcal{C}^r$ funkcij na X (to je ∞-dimenzionalen vektorski prostor).

Opomba. Iz definicij sledi, da je vsaka lokalna karta (U, φ) na neki $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti X $\mathcal{C}^r$-preslikava $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$.

Definicija 10. $\mathcal{C}^r$-difeomorfizem $f : X \to Y$ je bijektivna preslikava (homeomorfizem) med $\mathcal{C}^r$-mnogoterostima, ki je $\mathcal{C}^r$ ter je f^{-1} tudi $\mathcal{C}^r$.

Trditev 2. *Kompozicija gladkih $\mathcal{C}^r$-preslikav nad mnogoterostmi je spet $\mathcal{C}^r$-preslikava.*

Dokaz. Ideja:

$$\begin{tikzcd}
p \in U \subset X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & f(p) \in V \subset Y \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[d, "\psi"] & g(f(p)) \in W \subset Z \arrow[d, "\theta"] \\
0 \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, bend left, "\psi f \varphi^{-1}", "\mathcal{C}^r"'] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{C}^r", "(\theta g \psi^{-1})(\psi f \varphi^{-1}) = \theta(gf)\varphi^{-1}"'] & 0 \in \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, bend left, "\theta g \psi^{-1}", "\mathcal{C}^r"'] & 0 \in \theta(W) \subset \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Dobimo ravno $g \circ f$ v paru lokalnih kart (U, φ) na X in (W, θ) na Z. Ker je ta $\mathcal{C}^r$, sledi po definiciji, da je $g \circ f$ tudi $\mathcal{C}^r$. $\square$

Primer 9. Navedli bomo nekaj primerov gladkih preslikav.

1. Preslikave med evklidskimi prostori: običajna definicija gladkosti.

2. Preslikave v projektivne prostore:

$$\begin{array}{cccl} \mathbb{R}^n \supset D & \xrightarrow{f} & \mathbb{RP}^N & \qquad \text{koordinate } [y_0 \colon \dots \colon y_N] \\ x & \mapsto & [f_0(x) \colon \dots \colon f_N(x)] & \end{array}$$

Ta preslikava je dobro definirana na množici $\{x \in D \colon f_j(x) \neq 0 \text{ za vsaj en } j\}$. Predpostavimo, da je ta množica kar eneka D.
Kdaj je f razreda $\mathcal{C}^r$? Preverimo v lokalnih kartah $\mathbb{RP}^N$. Recimo,da je $f_j(a) \neq 0$ za nek $a \in D$. Torej velja isto v neki okolici $a \in U \subset D$. Sedaj vzamemo na $\mathbb{RP}^N$ lokalno karto $[y_0 \colon \dots \colon y_j \colon \dots \colon y_N] \mapsto \left(\frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{y_N}{y_j}\right) \in \mathbb{R}^n$ (izpustimo $\frac{y_j}{y_j}$):

$$(\psi \circ f)(x) = \left(\frac{f_0(x)}{f_j(x)}, \dots, \frac{f_N(x)}{f_j(x)}\right) \in \mathbb{R}^N, \qquad f_j(x) \neq 0 \text{ za } x \in U$$

Odtod vidimo: Če so vse komponente f_j $\mathcal{C}^r$-funkcije na D, potem je $f \colon D \to \mathbb{RP}^N$ $\mathcal{C}^r$-preslikava.

Podobno vidimo, da je preslikava $f \colon D \to \mathbb{CP}^N$, definiranan na neki domeni $D \subset \mathbb{C}^n$, holomorfna preslikava v $\mathbb{CP}^N$, če so vse njene komponente holomorfne funkcije in je v vsaki točki vsaj ena od komponent različna od nič.

3. Naj bo D domena v $\mathbb{C}$. *Meromorfna funkcija* na D je holomorfna funkcija $f \colon D \setminus \{a_j\} \to \mathbb{C}$ na komplementu neke diskretne množice točk $\{a_j\} \subset D$, ki ima v vsaki točki a_j pol (ali odpravljivo singularnost). Lokalno v okolici pola a_j:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a_j)^{n_j}}, \qquad g \text{ holomorfna v okolici točke } a_j,\ n_j \in \mathbb{N}$$

V polu:

$$\lim_{z \to a_j} |f(z)| = \infty$$

Meromorfni funkciji f priredimo preslikavo $\tilde{f} \colon D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{CP}^1$ (kompaktifikacija z eno točko, Riemannova sfera) s predpisom

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{če } z \neq a_j\ \forall j \\ \infty & \text{če } z = a_j \text{ za nek } j \end{cases}$$

$\tilde{f}$ je zvezna preslikava $D \to \mathbb{CP}^1$. Trdimo, da je $\tilde{f}$ dejansko holomorfna preslikava.

$$\mathbb{CP}^1 = \{[z_0 \colon z_1] \colon z_0, z_1 \text{ nista obe } 0\}, \qquad \text{karti:} \quad \begin{tikzcd} {[z_0 \colon z_1]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \frac{z_1}{z_0} = \zeta \arrow[d, "\frac{1}{\zeta}"] \\ & \frac{z_0}{z_1} \end{tikzcd}$$

Lahko zapišemo

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} [1\colon f(z)] & z \neq a_j \ \forall j \\ [0\colon 1] & z = a_j \text{ za nek } j \end{cases}$$

V okolici a_j:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a_j)^{n_j}}, \qquad g(a_j) \neq 0,\ g \text{ holomorfna}$$

$$\Longrightarrow \tilde{f}(z) = \left[1\colon \frac{g(z)}{(z-a_j)^{n_j}}\right] = [(z-a_j)^{n_j} : g(z)] \in \mathbb{CP}^1.$$

Sedaj pogledamo $\tilde{f}$ v drugi karti ψ:

$$(\psi \circ \tilde{f})(z) = \frac{(z-a_j)^{n_j}}{g(z)} \quad \text{holomorfna v okolici točke } a_j.$$

V točki $z = a_j$ ima $\psi \circ \tilde{f}$ ničlo reda n_j.

Opomba: če je f meromorfna na D, potem $f = \frac{g}{h}$, kjer sta g in h holomorfni. Potem

$$\tilde{f}(z) = \left[1\colon \frac{g(z)}{h(z)}\right] = [h(z)\colon g(z)] \in \mathbb{CP}^1$$

Velja tudi obratno: vsaka holomorfna preslikava $D \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{CP}^1$, $\tilde{f} \not\equiv \infty$, definira meromorfno funkcijo na D (isti postopek, le obrnjen).

$$D \subset \mathbb{C}^n \xrightarrow{f} [f_0(z)\colon f_1(z)\colon \ \ldots : f_N(z)] \in \mathbb{CP}^N$$

4. Če so $f_0, \ldots, f_N$ holomorfne funkcije, $\forall z$ vsaj ena $f_j(z) \neq 0 \Rightarrow f$ holomorfna preslikava

5. Naj bo $F = (P_0, P_1, \ldots, P_N)\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^N$ holomorfna preslikava, katere komponente P_j so homogeni polinomi stopnje d (vsi iste stopnje!). Torej je $F(tz) = t^d F(z)$ za vsak $t \in \mathbb{C}$. Predpostavimo, da je $F(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$. (To lahko velja samo v primeru ko je $n \leq N$.) Torej F preslika vsako kompleksno premico v $\mathbb{C}^{n+1}$ skozi izhodišče $z = 0$ v neko kompleksno premico skozi izhodišče v $\mathbb{C}^{N+1}$. Zato F določa natanko eno preslikavo $f\colon \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^N$, tako da komutira naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{n+1}_* \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{C}^{N+1}_* \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{CP}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{CP}^N \end{tikzcd}$$

Naloga. Preveri, da je f holomorfna preslikava, ki je v vsakem paru standardnih lokalnih kart na obeh projektivnih prostorih podana z racionalno preslikavo v spremenljivkah $z = (z_0, z_1 \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

I.6 Podmnogoterosti

Modeli gladkih podmnogoterosti so gladke krivulje in ploskve v evklidskem prostoru. Pojem podmnogoterosti bomo sedaj definirali za podmnožice v poljubni gladki ali kompleksni mnogoterosti.

Definicija 11. Naj bo M gladka mnogoterost dimenzije m in razreda $\mathcal{C}^r$ za nek $r \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty, \omega\}$. Podmnožica $N \subset M$ se imenuje $\mathcal{C}^r$ *podmnogoterost* dimenzije n, če za vsako točko $p \in N$ obstaja odprta okolica $U \subset M$ in lokalna karta $\phi \colon U \to U' \subset \mathbb{R}^m$ (v maksimalnem atlasu, ki določa gladko strukturo na M), tako da velja

$$\phi(N \cap U) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) \cap U'.$$

Vsaka lokalna karta (U, ϕ) na M, ki zadošča zgornjemu pogoju, se imenuje *odlikovana karta* glede na N.

Število $d = m - n$ se imenuje *kodimenzija* N v M in se označi $\operatorname{codim}(N, M)$. Podmnogoterost kodimenzije 1 se imenuje *hiperploskev*.

Naj bo $\pi \colon \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ koordinatna projekcija $\pi(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$. Vsaki odlikovani (glede na N) karti (U, ϕ) priredimo lokalno karto $(N \cap U, \pi \circ \phi|_{N \cap U})$ na N. Množica tako dobljenih kart sestavlja atlas $\mathcal{U}'$ na N. Prehodne preslikave v tem atlasu so zožitve prehodnih preslikav med kartami atlasa $\mathcal{U}$ in so zato razreda $\mathcal{C}^r$. Torej atlas $\mathcal{U}'$ določa na N strukturo $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti; imenujemo jo *podmnogoterostna struktura*, ki je inducirana z inkluzijo.

Analogno definiramo pojem kompleksne podmnogoterosti.

Primer 10. Če je $U \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in je $f = (f_1, \ldots, f_d) \colon U \to \mathbb{R}^d$ preslikava razreda $\mathcal{C}^r$, potem je njen graf

$$G_f = \{(x, f(x)) \colon x \in U\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$$

podmnogoterost razreda $\mathcal{C}^r$. Preslikava

$$\phi \colon U \times \mathbb{R}^d \to U \times \mathbb{R}^d, \qquad \phi(x, y) = (x, y - f(x)),$$

je difeomorfizem (in zato lokalna karta), ki graf G_f preslika na $U \times \{0\}^d$, torej ga globalno izravna.

Analogno je graf holomorfne preslikave $f = (f_1, \ldots, f_d) \colon U \to \mathbb{C}^d$ na domeni $U \subset \mathbb{C}^n$ kompleksna podmnogoterost kompleksne kodimenzije d v $U \times \mathbb{C}^d \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$.

Podmnogoterosti lahko lokalno, včasih pa tudi globalno, predstavimo kot nivojnice gladkih oziroma holomorfnih preslikav. Pri tem igra odločilno vlogo naslednji klasični izrek o implicitni funkciji.

Izrek 5 (Izrek o implicitni funkciji). *Če je f funkcija razreda $\mathcal{C}^r$ v okolici točke $p \in \mathbb{R}^m$, tako da je $f(p) = 0$ in je $df_p \neq 0$ ($\Leftrightarrow \nabla f_{(p)} \neq 0$), potem lahko nivojnico $Z := f^{-1}(0)$ lokalno v okolici točke p predstavimo kot graf $\mathcal{C}^r$ funkcije $m-1$ spremenljivk; torej je Z lokalna $\mathcal{C}^r$ hiperploskev v okolici točke p.*

Splošneje, če je $f = (f_1, \ldots, f_d)\colon U \to \mathbb{R}^d$ $\mathcal{C}^r$ preslikava v okolici točke $p \in \mathbb{R}^m$, tako da je $f(p) = 0$ in ima diferencial df_p v točki p maksimalen rang d, potem je nivojnica $Z = f^{-1}(0)$ lokalno v okolici točke p predstavljiva kot graf neke $\mathcal{C}^r$ preslikave $g = (g_1, \ldots, g_d)$ nad domeno v $\mathbb{R}^{m-d}$. Torej je Z podmnogoterost razreda $\mathcal{C}^r$ in kodimenzije d v neki okolici točke p.

Analogen izrek velja za holomorfne preslikave.

Konkretno: Če je $\frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \neq 0$, potem je v neki okolici točke $p = (p_1, \ldots, p_m)$ množica $\{f = 0\}$ graf

$$x_m = g(x_1, \ldots, x_{m-1}),$$

kjer je g definirana v okolici točke $(p_1, \ldots, p_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$.

Torej nam projekcija $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_{m-1})$ da lokalno karto v okolici p na $Z = \{f^{-1}(0)\}$.

Primer 11. Sfera s središčem 0 in polmerom $r > 0$ v $\mathbb{R}^{n+1}$ je podana z enačbo

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2.$$

Ker je diferencial df_p enak 0 samo v izhodišču $p = 0$, je vsaka sfera realno analitična hiperploskev.

Podobno dobimo *kompleksno sfero* $\Sigma \subset \mathbb{C}^{n+1}$ kot nivojnico zgornje funkcije, pri čemer spremenljivke $x_0, \ldots, x_n$ lahko zavzamejo poljubne kompleksne vrednosti.

Primer 12. Če je M gladka mnogoterost dimenzije m z robom, potem je njen rob ∂M gladka podmnogoterost dimenzije $m-1$. Npr., enotna sfera $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ je rob zaprte enotne krogle

$$B^{m+1} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \colon x_0^2 + \ldots + x_m^2 \leq 1\}.$$

Primer 13. Omenimo naj, da za vsako zaprto množico $E \subset \mathbb{R}^n$ obstaja gladka funkcija $f\colon \mathbb{R}^n \to R$, da je $\{f = 0\} = E$. Torej nivojnica $f^{-1}(0)$ v splošnem ni mnogoterost. V tem primeru je $df_x = 0$ za vsako točko $x \in \overline{\mathring{E}}$, zato pogoji izreka o implicitni funkciji v taki točki niso izpolnjeni.

Izrek o implicitni funkciji je preprosta posledica izreka o inverzni preslikavi. V posebnem primeru $d = 1$ je redukcija naslednja. Preslikava

$$F(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_{m-1}, f(x_1, \ldots, x_m)) \in \mathbb{R}^m$$

je razreda $\mathcal{C}^r$ v okolici točke p. Njen diferencial je podan z Jacobijevo matriko

$$DF = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & I_{m-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \partial f/\partial x_1 & \dots & \partial f/\partial x_{m-1} & \partial f/\partial x_m \end{array}\right]$$

Ker je $\det DF = \mathcal{J}F = \frac{\partial f}{\partial x_m} \neq 0$, je po izreku o inverzni preslikavi F lokalno obrnljiva v točki p. Torej lahko enačbo $F(x) = y$ enolično rešimo kot $x = G(y)$ za y v okolici točke $F(p)$. Pišimo $G = (G_1, \dots, G_m)$. Iz oblike preslikave F dobimo s primerjavo koordinat naslednje enačbe:

$$x_1 = y_1, \dots, x_{m-1} = y_{m-1},\ x_m = G_m(x_1, \dots, x_{m-1}, y_m).$$

Ker je nivojnica $Z = \{f = 0\}$ določena z enačbo $F_m = y_m = 0$, iz zgornjih enačb sledi, da je Z lokalno predstavljena z grafom

$$x_m = G(x_1, \dots, x_{m-1}, 0).$$

Posledica 2. *Če je f gladka funkcija in je $df_p \neq 0$ za vsako točko $p \in Z = f^{-1}(0)$, potem je Z gladka podmnogoterost dimenzije $n - 1$.*

Definicija 12. Število $c \in \mathbb{R}$ je regularna vrednost funkcije f, če je $df_p \neq 0$ za vsak $p \in f^{-1}(c)$. Vrednost, ki ni regularna, je kritična.

Iz definicije sledi, da je število c kritična vrednost funkcije f natanko tedaj, ko nivojnica $f^{-1}(c)$ vsebuje vsaj eno kritično točko, to je točko, v kateri je $df_p = 0$. V takih točkah nivojnica ni nujno mnogoterost, kot lahko vidimo na naslednjem primeru.

Primer 14. Oglejmo si ravninsko krivuljo, podano z enačbo

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 = y^3\}.$$

Ekvivalentno: $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Lahko jo parametriziramo s $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = t^3, \quad y(t) = t^2.$$

V okolici točke $(0, 0)$ krivulja C ni gladka podmnogoterost, je pa topološka mnogoterost.

Naloga: oglej si nivojnice $x^2 - y^3 = c$ za majhne c v okolici $(0, 0)$.

Izrek o implicitni funkciji je poseben primer naslednjega izreka o rangu.

Izrek 6 (Izrek o rangu preslikave). *Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ domena v $\mathbb{R}^n$ in $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^k$-preslikava za nek $k \geq 1$. Če je rang*

$$r := \operatorname{rang} df_x = \operatorname{rang}_x f \leq \min\{n, m\}$$

konstanten (neodvisen od točke $x \in D$), potem za vsako točko $p \in D$ obstajata $\mathcal{C}^k$ karti (U, φ) na $\mathbb{R}^n$ in (V, ψ) na $\mathbb{R}^m$, tako da je $p \in U \subset D$, $\varphi\colon U \overset{\cong}{\to} U' \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi(p) = 0$ $f(U) \subset V$, $\psi\colon V \overset{\cong}{\to} V' \subset \mathbb{R}^m$, $\psi(f(p)) = 0$,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & V \arrow[d, "\psi"] \\ U' \arrow[r, "\tilde{f}"] & V' \end{tikzcd}$$

tako da je preslikava $\tilde{f} = \psi \circ f|_U \circ \varphi^{-1}\colon U' \to V'$ oblike

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in U'.$$

Če označimo

$$\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r, \quad \pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r) \quad \text{(koordinatna projekcija)},$$
$$\iota\colon \mathbb{R}^r \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \iota(x_1, \ldots, x_r) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \quad \text{(vložitev)},$$

potem lahko zapišemo $\tilde{f}$ v obliki $\tilde{f} = \iota \circ \pi$.

Izrek o rangu se dokaže enako kot izrek o implicitni funkciji; v bistvu gre za redukcijo na izrek o inverzni preslikavi.

Posebni primeri:

1. $r = m = n \Rightarrow$ izrek o inverzni preslikavi, $\widetilde{f} = id$, f je lokalni difeomorfizem
2. $r = n < m \Rightarrow \widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = (\underbrace{x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0}_{m})$, f je imerzija
3. $n > m = r \Rightarrow \widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$ projekcija na prvih m koordinat, f je submerzija

Regularne preslikave: imerzija, submerzija, lokalni difeomorfizmi, preslikave konstantnega ranga.

Opomba.
1. Ker je izrek lokalen, se direktno posploši na mnogoterosti.
2. Vsako vlakno $f^{-1}(q)$ $(q \in N)$ regularne preslikave je gladka podmnogoterost v M.

Opomba. Če je f lokalno oblike $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m)$, $m < n$, potem so vlakna lokalno 'vertikalne' ravnine.

I.7 Imerzije in vložitve mnogoterosti

I.8 Krovne in kvocientne mnogoterosti

Trditev 3. *Naj bo $\pi\colon X \to Y$ lokalni homeomorfizem Hausdorffovih 2-števnih prostorov. Če ima Y strukturo $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti, potem obstaja na X natanko določena struktura $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti, tako da je π lokalni $\mathcal{C}^r$-difeomorfizem.*

Rečemo, da smo $\mathcal{C}^r$ strukturo na Y potegnili nazaj na X s homeomorfizmom.

Dokaz te trditve je preprost. Naj bo $\mathcal{V} = \{(V_j, \psi_j)\}$ $\mathcal{C}^r$-atlas na Y. Naj bo $U \subset X$ dovolj majhna odprta množica, tako da je $\pi(U) \subset V_j$ za nek j. Kompozicija $\psi \circ \pi\colon U \to \mathbb{R}^n$ je homeomorfizem na odprato podmnožico $(\psi_j \circ \pi)(U) \subset \mathbb{R}^n$. Par $(U, \psi_j\pi)$ vzamemo za lokalno karto na X. Prostor X lahko pokrijemo s takimi kartami in dobimo atlas $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ na X. Takoj vidimo, da je to $\mathcal{C}^r$-atlas. Prehodna preslikava: $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = (\psi_j \circ \pi) \circ (\psi_i \circ \pi)^{-1} = \psi_j \circ \pi \circ (\pi|_{U_i})^{-1} \circ \psi_i^{-1} = \psi_j \circ \psi_i^{-1}$. Torej dobimo iste prehodne preslikave kot v atlasu $\mathcal{V}$ na Y.

Oglejmo si preslikavo $\pi|_{U_i}\colon U_i \to Y$ v paru lokalnih kart $(U_i, \psi_i \circ \pi)$ na X in (V_i, ψ_i) na Y:

$$\tilde{\pi} = \psi_i \circ \pi \circ (\psi_i \circ \pi)^{-1} = \psi_i \circ \pi \circ (\pi|_{U_i})^{-1} \circ \psi_i^{-1} = \mathrm{id}$$

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_i=\psi_i\circ\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_i \arrow[d, "\psi_i"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\tilde{\pi}=\mathrm{id}"'] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Vidimo torej, da je v tem paru kart π podana z identično preslikavo.

Oglejmo si sedaj naslednji obratni problem. Naj bo $\pi\colon X \to Y$ lokalni homeomorfizem. Predpostavimo, da sta X in Y 2-števna Hausdorffova prostora in da je π surjektivna. Recimo, da je X opremljena s strukturo gladke $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti. Vprašanje je, kdaj obstaja $\mathcal{C}^r$-struktura na Y, da je π lokalni difeomorfizem.

Recimo, da za neko točko $y \in Y$ obstajata vsaj dve točki $x_1 \neq x_2 \in X$, tako da velja $\pi(x_1) = \pi(x_2) = y$. Ker je π lokalni homeomorfizem, obstajajo okolice $x_1 \in U_1 \subset X$, $x_2 \in U_2 \subset X$ in $y \in V \subset Y$, da je $\pi|_{U_j}\colon U_j \to V$ homeomorfizem za $j = 1, 2$. Če sta U_1, U_2 dovolj majhni, potem obstajata $\mathcal{C}^r$ lokalni karti $\varphi_j\colon U_j \xrightarrow{\cong} U_j' \subset \mathbb{R}^n$ za $j = 1, 2$. Sedaj dobimo dve lokalni karti na Y:

$$(V, \underbrace{\varphi_j \circ (\pi|_{U_j})^{-1}}_{\psi_j}) \quad \text{za } j = 1, 2.$$

Oglejmo si prehodno preslikavo:

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = \varphi_2 \circ (\pi|_{U_2})^{-1} \circ (\varphi_1 \circ (\pi|_{U_1})^{-1}) = \varphi_2 \circ (\pi|_{U_2})^{-1} \pi|_{U_1} \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2 \circ \underbrace{((\pi|_{U_2})^{-1} \circ \pi|_{U_1})}_{U_1 \xrightarrow{\cong} U_2} \circ \varphi_1^{-1}$$

Če bi vedeli, da je $\pi_{12} \overset{def}{=} (\pi|_{U_2})^{-1} \circ \pi|_{U_1}$ difeomorfizem (v dani $\mathcal{C}^r$-strukturi na X), lahko zaključimo, da sta karti (V, ψ_1) in (V, ψ_2) na Y $\mathcal{C}^r$ kompatibilni.

Sedaj bomo poiskali naravne pogoje na π, pri katerih je zgornji pogoj izpolnjen.

Definicija 13. Zvezna surjektivna preslikava $\pi\colon X \to Y$ topoloških prostorov se imenuje krovna preslikava, če ima vsaka točka $y \in Y$ odprto okolico $V \subset Y$, katere praslika $\pi^{-1}(V) = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ je disjunktna unija odprtih podmnožic $U_\alpha \subset X$, tako da je za vsak $\alpha \in A$ zožitev $\pi|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \xrightarrow{\cong} V$ homeomorfizem množice U_α na množico V. V tem primeru trojico (X, Y, π) imenujemo *krov*. Prostor X je *totalni prostor*, Y pa je *bazni prostor* krova.

Krov je isto kot sveženj z diskretno topologijo na vlaknu $A \cong \pi^{-1}(y)$. O svežnjih s splošnejšimi (nediskretnimi) vlakni bomo govorili kasneje.

Definicija 14. Naj bo $\pi\colon X \to Y$ krov. Preslikava $f\colon X \to X$, ki zadošča pogoju $\pi \circ f = \pi$, se imenuje *krovna translacija*. Grupo vseh krovnih translacijo krova π označimo z $\mathrm{Deck}_\pi(X)$.

Opomba. Očitno velja $\pi \circ f = \pi$ natanko tedaj, ko za vsako točko $x \in X$ leži njena slika $f(x)$ na istem vlaknu preslikave π. Iz definicij sledi, da je vsaka krovna translacija lokalno (na majhnih množicah) oblike $f|_{U\alpha} = (\pi|_{U_\beta})^{-1} \circ \pi|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to U_\beta$. $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ je dejansko grupa za kompozicijo $\circ$.

Naloga. Naj bo X povezan, $f \in \mathrm{Deck}_\pi(X)$ in $f(x) = x$ za nek $x \in X$. Dokaži, da je $f = \mathrm{Id}_X$.

Naloga. Dokaži: Če je X kompakten in je $\pi\colon X \to Y$ surjektiven lokalen homeomorfizem, potem je π končnolistni krov (to je, krov s končnim vlaknom).

Definicija 15. Krov $\pi\colon X \to Y$ se imenuje *regularen*, če grupa $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ krovnih translacij deluje tranzitivno na vsakem vlaknu (to je, poljubni dve točki na istem vlaknu $\pi^{-1}(y)$ lahko preslikamo eno v drugo z neko krovno translacijo).

Primer 15. 1. Krožnica $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$. Naj bo $k \in \mathbb{N}$.
$\pi\colon S^1 \to S^1$, $\pi(z) = z^k$ je krovna projekcija.
Vlakno $\pi^{-1}(w) = \{z_1, \ldots, z_k\}$ so ravno vsi k-ti koreni števila w.

$$w = e^{i\theta}: \quad z_j = e^{\frac{i\theta}{k} + j\frac{2\pi i}{k}}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Grupa krovnih transformacij je generirana z rotacijo

$$S^1 \ni z \overset{\sigma}{\longmapsto} e^{\frac{2\pi i}{k}} z.$$

Torej je $\mathrm{Deck}_\pi S_1 = \langle \sigma \rangle = \mathbb{Z}_k := \mathbb{Z}/_{k\mathbb{Z}}$.

2. Ista preslikava $z \mapsto z^k$, $\mathbb{C}_* \to \mathbb{C}_*$.

3. $\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x} = w$
   Vlakno: $\pi^{-1}(w) = x + \mathbb{Z}$
   Grupa $\mathrm{Deck}_\pi(\mathbb{R})$ je generirana s preslikavo $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma(x) = x + 1$.
   $\mathrm{Deck}_\pi \mathbb{R} = \langle \sigma \rangle = \mathbb{Z}$.

4. Nadomestimo $\mathbb{R}$ s $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}_*$, $z \mapsto e^{2\pi i z}$.
   $\mathrm{Deck}_\pi \mathbb{C} = \langle \sigma \rangle = \mathbb{Z}$, $\sigma(z) = z + 1$

Če je $\pi\colon X \to Y$ regularen krov, potem je očitno

$$Y \cong X/_{\mathrm{Deck}_\pi X} = X/_\sim,$$

kjer je relacija definirana s pogojem

$$x \sim x' \Leftrightarrow \exists \sigma \in \mathrm{Deck}_\pi X,\ \sigma(x) = x'.$$

Kvocient Y se v takem primeru imenuje *prostor orbit* grupe $\mathrm{Deck}_\pi X$.

Primer 16. $X = \mathbb{R}$, $\sigma(x) = x + 1$, $\mathbb{R}/_\sim = \mathbb{R}/_{x \sim x+1} = S^1$.

Sedaj si oglejmo obraten problem. Najprej si moramo ogledati pojem delovanja grupe na mnogoterosti. Označimo z $\mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$ množico vseh $\mathcal{C}^r$ diffeomorfizmov $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti X; to je očitno grupa za kompozicijo.

Definicija 16. Naj bo X $\mathcal{C}^r$-mnogoterost in Γ neka abstraktna grupa z enoto 1. Γ deluje kot grupa $\mathcal{C}^r$ difeomorfizmov na X, če je vsakemu elementu $g \in \Gamma$ prirejen nek difeomorfizem $\theta_g \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$, tako da velja

$$\theta_1 = \mathrm{Id}_X, \quad \theta_{gg'} = \theta_g \circ \theta_{g'} \quad \forall g, g' \in \Gamma.$$

Ekvivalentno, predpis $\Gamma \ni g \mapsto \theta_g \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$ je homomorfizem grup. (Odtod sledi $\theta_{g^{-1}} = \theta_g^{-1}$ za vsak $g \in \Gamma$.) Grupa deluje *zvesto*,če $1 \neq g \in \Gamma \implies \theta_g \neq \mathrm{Id}_X$ (to je, homomorfizem $\Gamma \to \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$, $g \mapsto \theta_g$, je injektiven).

Tako delovanje grupe Γ na X se imenuje *levo delovanje. Desno delovanje* definiramo s pogojem $\theta_{gg'} = \theta_{g'} \circ \theta_g$. Omejili se bomo na leva delovanja.

Če je delovanje zvesto, lahko grupni element $g \in \Gamma$ identificiramo s prirejenim difeomorfizmom $\theta_g \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$; s tem identificiramo Γ z ustrezno podgrupo v $\mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$. V tem primeru bomo pogosto pisali

$$\theta_g(x) = g \cdot x, \quad x \in X,\ g \in \Gamma.$$

Brez izgube splošnosti se omejimo na zvesta delovanja.

Orbita točke $x \in X$ (glede na dano grupo) je množica

$$\Gamma x = \{g\cdot x \colon g \in \Gamma\} \subset X.$$

Očitno je X disjunktna unija orbit. Relacija

$$x \sim y \overset{def}{\iff} \big[\exists g \in \Gamma,\ \text{tako da } g\cdot x = y\big] \iff \Gamma x = \Gamma y$$

je očitno ekvivalenčna relacija na X. Kvocientni prostor $X/_\sim = X/_\Gamma$ se imenuje *prostor orbit.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"', "\text{kvoc. proj.}"] \\ X/_\Gamma \end{tikzcd}$$

Vprašanje je, kdaj (pri kakšnih pogojih na delovanje) je $X/_\Gamma$ Hausdorffov prostor in kdaj je kvocientna projekcija $\pi \colon X \to X/_\Gamma$ krovna projekcija.

Definicija 17. Naj bo X $\mathcal{C}^r$-mnogoterost in Γ neka diskretna grupa $\mathcal{C}^r$-difeomorfizmov mnogoteorsti X ($\Gamma \subset \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$). Grupa Γ deluje na X *povsem nezvezno* ali *diskretno* (angl.: *totally discontinuously*), če velja:

1. Vsaka točka $x \in X$ ima odprto okolico $U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \emptyset$ razen za neko končno množico elementov $g \in \Gamma$.
2. Za vsak par točk $x, x' \in X$, ki nista na isti orbiti ($\Gamma x \neq \Gamma y$) obstajata odprti okolici $x \in U \subset X$, $x' \in U' \subset X$, tako da je $gU \cap U' = \emptyset$ za vse $g \in \Gamma$. (Ekvivalentno, $gU \cap g'U' = \emptyset \quad \forall g, g' \in \Gamma$.)

Iz prve točke preprosto sledi, da je $gx = x$ za kvečjemu končno $g \in \Gamma$. Taka točka x se imenuje *negibna točka* difeomorfizma g. Če poleg tega zahtevamo še

3. $gx \neq x \quad \forall x \in X,\ \forall g \in \Gamma \setminus \{1\}$

potem imamo diskretno delovanje brez fiksnih točk.

Če Γ deluje na X povsem nezvezno, potem iz zahteve (1) očitno sledi, da je za vsako točko $x \in X$ njena izotropna grupa

$$\Gamma_x = \{g \in \Gamma \colon g\cdot x = x\}$$

končna. (Očitno je Γ_x podgrupa grupe Γ.) V obratni smeri lahko dokažemo naslednje:

Trditev 4. *Če deluje Γ povsem nezvezno na X, potem za vsako točko $x \in X$ obstaja odprta okolica $x \in U \subset X$, tako da velja*

$$gU \cap U \neq \emptyset \iff g \in \Gamma_x.$$

Dokaz. Implikacija $\Leftarrow$ je očitna. Dokažimo sedaj implikacijo $\Rightarrow$. Recimo, da za neko okolico $U \subset X$ točke x elementi $g_1 = 1, g_2, \ldots, g_k \in \Gamma$ zadoščajo pogoju $g_j(U) \cap U \neq \emptyset$, za vse ostale elemente $g \notin \{g_1, \ldots, g_k\}$ pa velja $g(U) \cap U = \emptyset$. Če U zmanjšamo, se množica $\{g_1, \ldots, g_k\}$ kvečjemu zmanjša. Torej lahko izberemo U' tako, da za vsako manjšo okolico $x \in U' \subset U$ dobimo isto kolekcijo elementov $g_1, \ldots, g_k \in \Gamma$, ki zadoščajo zgornji predpostavki. Odtod sledi, da je $g_j(x) = x$ za $j = 1, \ldots, k$, torej so ti elementi v izotropni grupi Γ_x. Dokaz: Izberemo zaporedje vloženih okolic $U_1 = U' \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$, $\bigcap_j U_j = \{x\}$. Za vsak U_l je $g_j(U_l) \cap U_l \neq \emptyset$. Torej obstaja $x_l \in U_l$, da je $g_l(x_l) \in U_l$. Pri $l \to \infty$ očitno velja $x_l \to x$ in $g_j(x_l) \to x$, saj se okolice U_l krčijo proti x. Iz zveznosti g_j sledi $g_j(x) = x$. $\square$

Posledica 3. *Če je delovanje brez negibnih točk in povsem nezvezno, potem za vsak $x \in X$ obstaja okolica $U \subset X$, da je $gU \cap U = \emptyset$, $\forall g \neq 1$.*

Naloga. Dokaži: Če Γ deluje povsem nezvezno, potem je vsaka orbita $\Gamma x = \{gx \colon g \in \Gamma\} \subset X$ zaprta diskretna podmnožica v X (brez stekališč v X).

Vprašanje: Recimo, da Γ deluje na X tako, da so vse njene orbite Γx diskretne v X in je vsaka izotropna grupa Γ_x končna. Ali odtod sledi aksiom 1^o v definiciji povsem nezveznega delovanja?

Izrek 7. *Naj bo X $\mathcal{C}^r$-mnogoterost ($r \in \{0, 1, \ldots, \infty, \omega, \mathcal{O}\}$). Če neka končna ali števna grupa Γ deluje na X povsem nezvezno in brez fiksnih točk, potem ima prostor orbit $X/_\Gamma = Y$ strukturo $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti, tako da je kvocientna projekcija $X \xrightarrow{\pi} X/_\Gamma = Y$ krovna projekcija razreda $\mathcal{C}^r$ in je Γ ravno grupa njegovih krovnih translacij: $\Gamma = \mathrm{Deck}_\pi(X)$.*

Dokaz. Naj bo $x \in X$. Po pogojih izreka obstaja odprta okolica $U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \emptyset$ za vsak $1 \neq g \in \Gamma$. Torej je $[U] = \pi(U) \subset Y$ okolica točke $\Gamma x = [x] \in Y$, za katero velja $\pi^{-1}([U]) = \bigsqcup_{g \in \Gamma} gU$ in so množice gU paroma disjunktne. Projekcija $\pi \colon gU \to [U]$ je očitno bijektivna in zvezna (po definiciji kvocientne topologije na Y). Poleg tega je π odprta preslikava, zato je zožitev $\pi \colon gU \to [U]$ homeomorfizem. Torej je Y lokalno evklidski prostor in je π krovna projekcija. Ker je X 2-števen, je tak tudi Y.
Zahteva 2^o v definiciji povsem nezveznosti nam zagotovi, da je kvocientni prostor Y Hausdorffov.
$\mathcal{C}^r$-strukturo na Y definiramo na naslednji način. Naj bo $x \in X$. Izberimo odprto okolico $x \in U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \emptyset \quad \forall g \neq 1$. Okolico U po potrebi še zmanjšamo, tako da obstaja lokalna karta $\varphi \colon U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ (v danem $\mathcal{C}^r$ atlasu na X). Sedaj vzamemo preslikavo

$$\varphi \circ (\pi|_U)^{-1} \colon \pi(U) \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$$

za lokalno karto na Y. Če sta $\psi = \varphi \circ (\pi|_U)^{-1}$ in $\psi' = \varphi' \circ (\pi|_{gU})^{-1}$ (pričemer je φ' lokalna karta na translatu gU) dve karti te oblike, je prehodna preslikava enaka

$$\psi' \circ \psi^{-1} = \varphi' \circ (\pi|_{gU})^{-1} \circ (\varphi \circ (\pi|_U)^{-1})^{-1} = \varphi' \circ \underbrace{(\pi|_{gU})^{-1} \circ \pi|_U}_{\theta_g \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)} \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^r$$

□

Primer 17. 1. Končna ciklična grupa $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ deluje na $\mathbb{C}$ z generatorjem

$$\sigma(z) = e^{\frac{2\pi i}{k}} z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

To je ravno rotacija ravnine za k-ti koren enote.
Pripadajoča kvocientna projecija je $\pi(z) = z^k$. Torej je $\mathbb{C}/_{\langle\sigma\rangle} \cong \mathbb{C}$.
Orbita točke z je

$$\pi^{-1}(\pi(z)) = \{e^{2m\pi i/k} z \colon m = 0, 1, \ldots, k-1\}.$$

2. $X = \mathbb{C}^2$, delovanje ciklične grupe $\mathbb{Z}_2$ z generatorjem $\sigma(z, w) = (-z, -w)$. Orbita točke (z, w) vsebuje še njej antipodno točko $(-z, -w)$. Definiramo polinomsko preslikavo

$$f \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad f(z, w) = (z^2, w^2, zw).$$

Orbite dane grupe so ravno vlakna preslikave f. Torej je slika $f(\mathbb{C}^2) \subset \mathbb{C}^3$ ravno prostor orbit $\mathbb{C}^2/_\Gamma$. Očitno je

$$f(\mathbb{C}^2) = \{(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in \mathbb{C}^3 \colon \zeta_3^2 = \zeta_1\zeta_2\}$$

To je kvadratična kompleksna hiperploskev v $\mathbb{C}^3$, ki je singularna v izhodišču $(0, 0, 0)$.

3. $X = \mathbb{R}^2$, delovanje ciklične grupe $\mathbb{Z}_2$ z generatorjem $\sigma(x, y) = (-x, y)$ (zrcaljenje čez y os).
$\mathbb{R}^2/_\Gamma = [0, \infty) \times \mathbb{R}$ (mnogoterost z robom).
Vse točke $(0, y)$ $(y \in \mathbb{R})$ so fiksne točke delovanja.

Naloga. Recimo, da sta X, Y $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti in je $\pi : X \to Y$ $\mathcal{C}^r$ krovna projekcija. Potem $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ deluje na X povsem nezvezno ter brez fiksnih točk. Elementi $g \in \mathrm{Deck}_\pi(X)$ so $\mathcal{C}^r$-difeomorfizmi.

Edini problem: $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ v splošnem ne deluje tranzitivno na vlaknih krovne projekcije $\pi \colon X \to Y$. Če $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ deluje tranzitivno na vlaknih, potem se krov imenuje *regularen.* V tem primeru sledi, da je Y izomorfna prostoru orbit: $Y = X/_{\mathrm{Deck}_\pi(X)}$.

Zveza med krovi nad Y ter podgrupami v fundamentalni grup $\pi_1(Y)$.

Najprej bomo na kratko ponovili pojem *fundamentalne grupe* mnogoterosti, nato pa brez dokazov navedli nekaj bistvenih rezultatov o krovnih prostorih. Za dokaze glej npr. J. Mrčun: Topologija. Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 44. DMFA, Ljubljana, 2008

Naj bo S^1 krožnica. Prelikave $\gamma\colon S^1 \to Y$ se imenujejo *zanke* v Y. Ekvivalentno, zanka je pot $\gamma\colon [0,1] \to Y$, pri kateri se začetna in končna točka ujemata: $\gamma(0) = \gamma(1)$. Izberemo neko točko $p \in Y$ in opazujemo le zanke, ki so pripete v točki p:

$$\gamma : S^1 \to Y \qquad \gamma(1) = p$$

Dve taki zanki γ in γ' sta *homotopni*, če obstaja zvezna preslikava $H\colon S^1 \times [0,1] \to Y$, ki zadošča pogojem

$$H(\cdot\,, 0) = \gamma, \quad H(\cdot\,, 1) = \gamma', \quad H(0,s) = H(1,s) = p \ (\forall s \in [0,1]).$$

Obstoj homotopije je ekvivalenčna relacija med zankami.

Homotopska grupa $\pi_1(Y,p)$ je množica homotopnih razredov zank v Y skozi p. V resnici je to grupa (v splošnem nekomutativna) z operacijo stika poti:

$$[\gamma][\gamma'] = [\gamma \cdot \gamma']$$

Naloga. Preveri, da je ta operacija dobro definirana, to je, da je homotopski razred stika $\gamma \cdot \gamma'$ odvisen samo od homotopskega razreda obeh zank γ in γ'.

Če je Y povezana, potem izbor bazne točke p ni bistven, saj so grupe $\pi_1(Y,p)$ za različne $p \in Y$ med seboj izomorfne. V tem primeru pišemo kar $\pi_1(Y)$.

Primer 18. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{C}_*) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Povezana mnogoterost Y se imenuje *enostavno povezana*, če je njena fundamentalna grupa trivialna: $\pi_1(Y) = 0$. (Včasih pišemo grupno operacijo multiplikativno: $\pi_1(Y) = 1$.)

Primer 19. $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$ za vsak $n \geq 1$, $\pi_1(S^n) = 0$ za vsak $n > 1$.

Vsaka zvezna preslikavo $f\colon X \to Y$ inducira homomorfizem fundamentalnih grup

$$f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Slika $f_*(\pi_1(X))$ je podgrupa v $\pi_1(Y)$.

Če je f krovna preslikava, potem je f_* injektivna. Pri dokazu tega dejstva potrebujemo izrek o dvigu homotopij v krovu.

Izrek 8. *Če je Y povezana in enostavno povezana mnogoterost, potem je vsak krov $\pi\colon X \to Y$ trivialen, to je $X \cong Y \times F$, kjer je F (diskretno) vlakno.*

Izrek 9. *Naj bo Y povezana mnogoterost. Za vsako podgrupo $G \subset \pi_1(Y)$ obstaja krovni prostor $f\colon X \to Y$, tako da je totalni prostor X povezan in je $f_*(\pi_1(X)) = G$. Krov $f\colon X \to Y$ je regularen natanko tedaj, ko je G podgrupa edinka grupe $\pi_1(Y)$. Tedaj je* $\mathrm{Deck}_f(X) \cong \pi_1(Y)/_G$.

Poseben primer: $G = \{0\} \subset \pi_1(Y)$, $f_*\colon \pi_1(X) \xrightarrow{bij.} G \Rightarrow \pi_1(X) = 0 \Rightarrow X$ enostavno povezan. Tak krov $X \to Y$ se imenuje *univerzalen krov* nad Y.

Ta izrek velja v vseh $\mathcal{C}^r$ kategorijah. Če je $f\colon X \to Y$ $\mathcal{C}^r$ krov, je $\mathrm{Deck}_f(X) \subset \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$.

Uporaba: Če želimo razumeti strukturo neke $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti (recimo pri klasifikaciji mnogoterosti), si ogledamo njen univerzalni krov $\pi\colon X \to Y$. Vemo, da je X enostavno povezan in je grupa krovnih translacij $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ podgrupa v grupi $\mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$, ki deluje na X prosto in povsem nezvezno. Kvocientna mnogoterost $Y = X/_{\mathrm{Deck}_\pi}(X)$ je prostor orbit te grupe.
S tem prevedemo problem klasifikacije mnogoterosti na problem klasifikacije enostavno povezanih mnogoterosti skupaj s prostim in povsem nezveznim delovanjem grup na njih.

Primer 20. Naj bo Y *Riemannova ploskev*, to je kompleksna mnogoterost $\dim_{\mathbb{C}} Y = 1$. Preprosti primeri so $\mathbb{C}$, domene v $\mathbb{C}$ in Riemannova sfera $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$.

Naj bo $X \xrightarrow{\pi} Y$ njen univerzalni krov. Potem je X enostavno povezana Riemannova ploskev.

Izrek 10 (Riemann-Koebe)**.** *Vsaka enostavno povezana Riemannova ploskev je biholomorfno ekvivalentna eni od ploskev $\mathbb{CP}^1$, $\mathbb{C}$, $\Delta = \{|z| < 1\}$. (Riemannov upodobitveni izrek: Vsaka domena $D \subsetneq \mathbb{C}$, $\pi_1(D) = 1$, je biholomorfno ekvivalentna disku Δ.)*

Iz elementarne teorije funkcij ene kompleksne spremenljivke je znano, da so grupe holomorfnih avtomorfizmov teh treh ploskev naslednje:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Aut}_{\mathrm{holo}}(\mathbb{CP}^1) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\colon\ ad - bc \neq 0\} & \text{(ulomljene linearne funkcije)} \\ \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b\colon\ a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\} & \text{(kompleksna afina grupa)} \\ \mathrm{Aut}(\Delta) = \{z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\colon\ a \in \Delta, \theta \in \mathbb{R}\} & \text{(Möbiusove preslikave)} \end{array}$$

Sedaj je treba najti diskretne podgrupe $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(X)$, $X \in \{\mathbb{CP}^1, \mathbb{C}, \Delta\}$, ki delujejo prosto in povsem nezvezno.

Ni težko preveriti, da ima vsak $\gamma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{CP}^1$ negibno točko. Torej $\mathbb{CP}^1$ nima netrivialnih holomorfnih kvocientov.
$\gamma(z) = az + b$, $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ je brez negibne točke natanko tedaj, ko je $a = 1$ in $b \neq 0$. Torej je γ translacija $z \overset{\gamma}{\mapsto} z + b$. Grupa translacij $\mathbb{Z} \cong \langle\gamma\rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ deluje na $\mathbb{C}$ brez fiksnih točk in povsem nezvezno.
Če $b = 1$: kvocientna projekcija $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}_*$, $z \mapsto e^{2\pi iz}$. V splošnem $z \mapsto e^{\frac{2\pi iz}{b}}$:

$$e^{\frac{2\pi i}{b}(z+b)} = e^{\frac{2\pi iz}{b}} e^{2\pi i} = e^{\frac{2\pi iz}{b}}.$$

Naj bosta $a, b \in \mathbb{C}_*$, $\frac{a}{b} \notin \mathbb{R}$.

$$\gamma(z) = z + a, \quad \sigma(z) = z + b$$

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \underbrace{\langle \gamma, \sigma \rangle}_{\Gamma} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$$

$$\mathbb{C}/_{\Gamma} = \text{torus s kompleksno strukturo}$$

Brez izgube splošnosti lahko gledamo primer $a = 1$, $\omega = \frac{b}{a} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$$\Gamma_\omega = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$$

$$\mathbb{C}/_{\Gamma_\omega} = \mathbb{T}_\omega \quad \text{(kompleksen torus, ki pripada številu } \omega)$$

V mreži $\Gamma_\omega = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$ lahko vselej najdemo število $\omega' = u + iv$, tako da je $\Gamma_\omega = \Gamma_{\omega'}$ in velja

$$|\omega'| > 1, \quad -\frac{1}{2} < u \leq \frac{1}{2} \quad \text{ali} \quad |\omega'| = 1, \quad 0 \leq u \leq \frac{1}{2}. \tag{I.8.1}$$

Generator $\omega' \in \Gamma_\omega$ s temi lastnostmi je enolično določen in natanko določa kompleksno strukturo na torusu. Drugače povedano:

Izrek 11. *Če sta ω_1 in ω_2 dve kompleksni števili z lastnostmi (I.8.1), potem sta pripadajoča torusa $\mathbb{T}_{\omega_1} = \mathbb{C}/_{\Gamma_{\omega_1}}$ in $\mathbb{T}_{\omega_2} = \mathbb{C}/_{\Gamma_{\omega_2}}$ biholomorfno ekvivalentna natanko tedaj, ko je $\omega_1 = \omega_2$.*

Torej biholomorfno neekvivalentni kompleksni torusi sestavljajo kompleksno enoparametrično družino. (Za dokaz glej npr. L. V. Ahlfors, Complex analysis. Second ed. McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1966.) Vsi 2-torusi so med seboj difeomorfni.

Da se pokazati, da nobena grupa translacij ravnine $\mathbb{C}$ z več kot dvema generatorjema ne deluje povsem nezvezno. Odtod zaključimo, da so netrivialni holomorfni kvocienti ravnine $\mathbb{C}$ ravno $\mathbb{C}_*$ ter kompleksni torusi. Drugače povedano,če je Y enostavno povezana Riemannova ploskev, katere univerzalni krov je $\mathbb{C}$, potem je Y enaka eni od ploskev $\mathbb{C}, \mathbb{C}_*$ ali kompleksni torus.

Vse ostale Riemannove ploskve so holomorfni kvocienti diska $\Delta \subset \mathbb{C}$. Teh je veliko.

Naj bo S_g kompaktna orientabilna ploskev roda $g \in \mathbb{Z}_+$. Pri $g = 0$ je to 2-sfera, pri $g = 1$ imamo torus, za $g > 1$ pa je S_g povezana vsota g torusov. Taka ploskev ima do difeomorfizma natančno samo eno gladko strukturo. (To je, poljubni dve gladki strukturi na njej sta difeomorfni.)

Obstaja veliko grup $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$, ki delujejo na disku povsem nezvezno in prosto (brez fiksnih točk), tako da je kvocient $\Delta/_{\Gamma}$ (ki je Riemannova ploskev) difeomorfen ploskvi S_g:

$$\begin{array}{c} \Delta \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \Delta/_{\Gamma} \cong S_g \end{array}$$

Za različne grupe $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$ lahko dobimo kvociente, ki so med seboj difeomorfni, niso pa biholomorfni.
Prostor modulov (imenovan tudi *Teichmüllerjev prostor*) je množica med seboj nebiholomorfnih kompleksnih struktur na dani ploskvi S_g. V primeru $g > 1$ lahko to množico predstavimo kot domeno v $\mathbb{C}^{3g-3}$, ki je homeomorfna krogli. (Več o uniformizacijski teoriji Riemannovih ploskev in o Teichmüllerjevih prostorih lahko najdete npr. v O. Lehto, Univalent functions and Teichmüller spaces. Graduate Texts in Mathematics, 109. Springer-Verlag, New York, 1987.)

Poglavje II

TANGENTNI SVEŽENJ IN VEKTORSKA POLJA

II.1 Tangentni sveženj mnogoterosti

I.1 Motivacija

Naj bo $\mathbb{R}^n \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ diferenciabilna preslikava.

Diferencial f v točki $p \in D$ je linearna preslikava $df_p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto df_p(v)$.

Tangentni prostor $T_p\mathbb{R}^n$ lahko razumemo kot množico vseh vektorjev $v \in \mathbb{R}^n$, pripetih v točki p. Torej je $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. Tega pojma ne moremo direktno posplošiti na mnogoterosti, saj na njih nimamo linearne strukture in zato vektorjev ne moremo translatirati.

Naj bo $M \subset \mathbb{R}^n$ podmnogoterost. Lokalno lahko M podamo z enačbami:

$$M \cap U = \{x \in U \colon g_1(x) = 0, \ldots, g_d(x) = 0\}.$$

Lahko vzamemo, da so gradienti $\nabla g_1, \ldots, \nabla g_d$ linearno neodvisni. Sedaj lahko definiramo tangentni prostor M v točki $p \in M$ kot vektorski podprostor v tangentnem prostoru $T_p\mathbb{R}^n$:

$$T_pM = \{v \in T_p\mathbb{R}^m \colon \underbrace{dg_j(p) \cdot v = 0}_{\Leftrightarrow \nabla g_j(p) \perp v},\ \forall j = 1, \ldots, d\}$$

Če je $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ neka $\mathcal{C}^1$ pot, $\gamma(0) = p$, potem velja $g_j(\gamma(t)) \equiv 0$, $j = 1, \ldots, d$. Z odvajanjem teh identitet po t pri $t = 0$ dobimo:

$$\nabla g_j(\gamma(0)) \cdot \dot{\gamma}(0) = 0 \Longrightarrow \dot{\gamma}(0) \in T_pM.$$

Obratno: vsak vektor $v \in T_pM$ je hitrostni vektor $v = \dot{\gamma}(0)$ neke $\mathcal{C}^1$ poti $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$.

Ta ideja se da posplošiti na mnogoterosti. Tangentni vektorji v točki $p \in X$ bodo ravno hitrostni vektorji poti v X, ki gredo pri $t = 0$ skozi p.

Za vektorje $v \in T_p\mathbb{R}^n$ imamo še drugo naravno interpretacijo, ki se ravno tako da posplošiti na mnogoterosti. Vektorju $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ priredimo smerni odvod:

$$\nabla_v f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) v_j = \nabla f(p) \cdot v.$$

Označimo z $\mathcal{C}_p^\infty$ algebro zarodkov gladkih funkcij v točki p. (Zarodek funkcije v točki p je predstavljen s funkcijo v neki odprti okolici te točke, pričemer dve funkciji predstavljala isti zarodek v točki p,če se ujemata v neki okolici p.) Operator ∇_v je linearen operator

$$\nabla_v \colon \mathcal{C}_p^\infty \to \mathbb{R}$$

ki zadošča Leibnizovemu pravilu

$$\nabla_v(fg) = \nabla_v f \cdot g(p) + f(p) \cdot \nabla_v f$$

Obe predstavi tangentnih vektorjev na $\mathbb{R}^n$ omogočata posplošitev na mnogoterosti.

I.2 Geometrijska konstrukcija tangentnega svežnja

Naj bo X mnogoterost vsaj $\mathcal{C}^1$, $p \in X$, $\gamma \colon (-\epsilon, \epsilon) \to X$ pot razreda $\mathcal{C}^1$, $\gamma(0) = p$.

Definicija 18. $\gamma \sim \gamma' \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ obstaja lokalna karta (U, φ) na X, $p \in U$, tako da velja

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi \circ \gamma = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi \circ \gamma.$$

Trditev 5. *Definicija relacije $\sim$ je neodvisna od izbire lokalne karte. Tako definirana relacija $\sim$ je ekvivalenčna relacija.*

Dokaz. Naj bo (V, ψ) neka druga karta na X. Tedaj velja:

$$\psi \circ \gamma = \underbrace{(\psi \circ \varphi^{-1})}_{\text{prehodna}} \circ \underbrace{(\varphi \circ \gamma)}_{\text{pot v } \mathbb{R}^n} \quad \text{pot v } \mathbb{R}^n$$

$$(\psi \circ \gamma)^{\cdot}(0) = d(\psi\varphi^{-1})_{(\varphi(p))}(\varphi \circ \gamma)^{\cdot}(0) = d(\psi\varphi^{-1})_{(\varphi(p))}(\varphi \circ \gamma')^{\cdot}(0) = (\psi \circ \gamma')^{\cdot}(0)$$

□

Označimo z $[\gamma]_p$ ekvivalenčni razred poti γ glede na relacijo $\sim$.

Definicija 19. Tangentni prostor mnogoterosti X v točki p je

$$T_pX = \{[\gamma]_p \colon \gamma\colon (-\epsilon, +\epsilon) \to X \ \mathcal{C}^1 \text{ pot },\ \gamma(0) = p\}.$$

Primer 21. $X = \mathbb{R}^n$, $p \in X$. Preverimo definicijo kar v identični karti.

$$\gamma \sim \gamma' \iff \dot\gamma(0) = \dot\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Oglejmo si preslikavo

$$T_p\mathbb{R}^n \ni [\gamma]_p \mapsto \dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Ta preslikava je bijektivna. Injektivna je po definiciji relacije $\sim$; surjektivnost vidimo tako, da vsakemu vektorju $v \in \mathbb{R}^n$ priredimo pot $\gamma(t) = p + tv$; očitno je $[\gamma]_p \mapsto \dot\gamma(0) = v$. S pomočjo te preslikave identificiramo tangentni prostor $T_p\mathbb{R}^n$ z $\mathbb{R}^n$.

Naj bo X poljubna $\mathcal{C}^1$-mnogoterost, $p \in X$. Izberemo lokalno karto (U, φ) na X, $p \in U$.

$$v \in T_pX, \quad v = [\gamma]_p \overset{d\varphi_p}{\longmapsto} [\varphi \circ \gamma]_{\varphi(p)=0} = (\varphi \circ \gamma)^{\cdot}(0) \in T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

$d\varphi_p \colon T_pX \overset{\cong}{\to} T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ je bijekcija. Surjektivnost: $v \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \varphi(p) + tv$ je pot v $\mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$ pot v X, $\gamma(0) = p$. Preveri: $d\varphi_p[\gamma]_p = v$.
$d\varphi_p$ se imenuje diferencial preslikave φ v točki p. Sedaj definirajmo diferencial poljubne preslikave.

Definicija 20. Naj bo $f\colon X \to Y$ neka $\mathcal{C}^1$ preslikava. Njen diferencial v točki p je preslikava $df_p\colon T_pX \to T_{f(p)}Y$, definirana s predpisom

$$df_p[\gamma]_p \overset{def}{=} [f \circ \gamma]_{f(p)}, \quad [\gamma]_p \in T_pX.$$

Trditev 6. *Diferencial df_p je dobro definirana preslikava, torej je desna stran odvisna le od ekvivalenčnega razreda poti $[\gamma]_p \in T_pX$, ne pa od izbire predstavnika.*

Dokaz. Naj bosta poti γ in γ' ekvivalentni v p: $[\gamma]_p = [\gamma']_p$. To pomeni, da za vsako lokalno karto (U, φ) na X, $p \in U$, velja $(\varphi \circ \gamma)^{\cdot}(0) = (\varphi \circ \gamma')^{\cdot}(0)$. Dokazati moramo, da sta poti $f \circ \gamma$ in $f \circ \gamma'$ ekvivalentni, torej da velja

$$[\varphi \circ \gamma]_{f(p)} = [f \circ \gamma']_{f(p)}$$

Izberimo karto (V, ψ) na Y, tako da je $f(p) \in V$. Zgornji pogoj je ekvivalenten

$$(\psi \circ f \circ \gamma)^{\cdot}(0) = (\psi \circ f \circ \gamma')^{\cdot}(0)$$

To sledi z uporabo verižnega pravila za preslikave med evklidskimi prostori:

$$\begin{aligned}(\psi f \gamma)^{\cdot}(0) &= (\psi f \varphi^{-1} \varphi\gamma)^{\cdot}(0) = ((\psi f \varphi^{-1}) \circ (\varphi\gamma))^{\cdot}(0) = d(\psi f \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\varphi\gamma)^{\cdot}(0) = \\ &= d(\psi f \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\varphi\gamma')^{\cdot}(0) = (\psi f \gamma')^{\cdot}(0).\end{aligned}$$

□

Definicija 21. Naj bo X $\mathcal{C}^1$-mnogoterost. Tangentni sveženj mnogoterosti X je disjunktna unija tangentnih prostorov v točkah $p \in X$:

$$TX = \bigsqcup_{p \in X} T_p X$$

Označimo s $\pi \colon TX \to X$ bazno projekcijo; torej je $\pi^{-1}(p) = T_p X$.

I.3 Tangentna preslikava

$\mathcal{C}^1$ preslikavi $f \colon X \to Y$ mnogoterosti priredimo njeno tangentno preslikavo

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & TY \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[r, "f"] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

$$Tf \colon T_p X \to T_{f(p)} Y$$
$$Tf|_{T_p X} = df_p = \text{ diferencial } f \text{ v točki } p$$

Osnovni primer: $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$: $TX = X \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, če identificiramo $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ kot prej. Isto velja, če je X odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$: $TX = X \times \mathbb{R}^n$.

$$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n : df_p \colon T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$$

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Tf} & Y \times \mathbb{R}^m \\ (x, v) & \mapsto & (f(x), df_x \cdot v) \end{array}$$

V tem primeru, ko je TX kar produkt baze z vlaknom $\mathbb{R}^n$, pravimo, da je TX trivialen sveženj ranga n nad X (izomorfen produktnemu svežnju $X \times \mathbb{R}^n$).

Izrek 12. *Tangentna preslikava zadošča naslednjim lastnostim:*

1. $f = \mathrm{Id}_X \Rightarrow Tf = \mathrm{Id}_{TX}$
2. $f \in \mathcal{C}^1(X, Y)),\ g \in \mathcal{C}^1(Y, Z) \Longrightarrow T(g \circ f) = Tg \circ Tf$
3. $f \in \mathrm{Diff}(X, Y), f^{-1} \colon Y \to X \Longrightarrow T(f^{-1}) = (Tf)^{-1}$

Te lastnosti sledijo neposredno iz že znanih lastnosti diferenciala. Prireditev

$$\begin{array}{ccc} X & \rightsquigarrow & TX \\ (f \colon X \to Y) & \rightsquigarrow & (Tf : TX \to TY) \end{array}$$

je kovarianten funktor iz kategorije $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti v kategorijo $\mathcal{C}^{r-1}$-vektorskih svežnjev nad $\mathcal{C}^r$-mnogoterostmi. Ta funktor se imenuje *tangentni funktor.*

Na TX konstruiramo strukturo $\mathcal{C}^{r-1}$-mnogoterosti (celo več, $\mathcal{C}^{r-1}$ vektorskega svežnja nad X) takole: Naj bo

$$\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$$

$\mathcal{C}^r$-atlas na X.

$$\varphi_\alpha \rightsquigarrow T\varphi_\alpha \colon TX|_{U_\alpha} = \bigcup_{p\in U_\alpha} T_pX = TU_\alpha \xrightarrow{\cong} TU'_\alpha = U'_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

$$[\gamma]_p \xrightarrow{T\varphi_\alpha} (\varphi_\alpha(p), (\varphi_\alpha \circ \gamma)^{\cdot}(0))$$

Vsako preslikavo te oblike $T\varphi_\alpha \colon TX|_{U_\alpha} \to U'_\alpha \times \mathbb{R}^n$ vzamemo s "sveženjsko karto" na TX. Tako dobimo na TX atlas

$$\{(TU_\alpha, T\varphi_\alpha)\}$$

Denimo, da $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq 0$. Izračunamo prehodno preslikavo:

$$(T\varphi_a) \circ (T\varphi_\beta)^{-1} \colon \underbrace{\varphi_\beta(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n}_{=T(\varphi_\beta(U_{\alpha\beta}))} \to \underbrace{\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n}_{=T(\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}))}$$

$$T(\varphi_\alpha)(T\varphi_\beta)^{-1} = T(\varphi_\alpha) \circ T(\varphi_\beta^{-1}) = T(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) = T(\varphi_{\alpha\beta})$$
$$(x, v) \mapsto (\varphi_{\alpha\beta}(x), d\varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot v)$$

$\varphi_{\alpha\beta}(x)$ je $\mathcal{C}^r$-difeomorfizem, $d\varphi_{\alpha\beta}(x)$ pa je predstavljena z neizrojeno $n \times n$ matrično funkcijo, katere komponente so prvi parcialni odvodi od komponent $\varphi_{\alpha\beta}$, torej so $\mathcal{C}^{r-1}$ funkcije. Zato je preslikava

$$(x, v) \mapsto d\varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot v$$

razreda $\mathcal{C}^{r-1}$ v obeh spremenljivkah; v spremenljivki $v \in \mathbb{R}^n$ je linearna.

Topologija na X je enolično določena z zahtevo, da je vsaka množica oblike $TX|_{U_\alpha}$ odprta v TX in da je sveženjska karta homeomorfizem:

$$T\varphi_\alpha \colon TX|_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U'_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

Očitno je X topološka mnogoterost (brez roba, če je X brez roba). Njena dimenzija je $\dim TX = 2\dim X$. Zgoraj opisani atlas določa na TX strukturo $\mathcal{C}^{r-1}$-mnogoterosti. Vsako vlakno $T_pX = \pi^{-1}(p)$ v tangentnem svežnju ima natanko eno strukturo n-dimenzionalnega vektorskega prostora ($n = \dim X$), realnega, če je X realna, kompleksnega, če je X kompleksna, tako da je za vsako karto (U, φ) na X prirejena tangentna preslikava

$$T\varphi \colon TX|_U \xrightarrow{\cong} \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$
$$p \in U : \quad T_pX \xrightarrow{d\varphi_p} d\varphi_p \cdot v$$

linearna na vsakem vlaknu (torej linearni izomorfizem). Ker je prehodna preslikava med dvema kartama linearni izomorfizem na vsakem vlaknu, je ta linearna struktura na T_pX dobro definirana (neodvisna od izbire karte).

I.4 Tangentni prostor podmnogoterosti

Naj bo $X \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^r$-podmnogoterost dimenzije m in kodimenzije $d = n - m$. Za vsako tovčko $p \in X$ obstaja okolica $U \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathcal{C}^r$-funkcije $g_1, \ldots, g_d \colon U \to \mathbb{R}$ z linearno neodvisnimi gradienti, da je

$$X \cap U = \{x \in U \colon g_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, d\}.$$

Tangentni sveženj $TX|_{X\cap U}$ je enak

$$TX|_{X\cap U} = \{(x, v) \colon x \in U,\, v \in \mathbb{R}^n,\, g_j(x) = 0,\, dg_j(x) \cdot v = 0,\ j = 1, \ldots, d\}$$

Odtod vidimo, da je TX $\mathcal{C}^{r-1}$-podmnogoterost mnogoterosti $T\mathbb{R}^n|_X = X \times \mathbb{R}^n$, in tudi $\mathcal{C}^{r-1}$-podmnogoterost v $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Velja še nekoliko več. Dopolnimo preslikavo $g = (g_1, \ldots, g_d) \colon U \to \mathbb{R}^d$ do lokalne karte

$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m, g_1, \ldots, g_d) \colon U \to \phi(U) = U' \subset \mathbb{R}^n.$$

Prirejena svežnjska karta $T\phi \colon TU \to TU' = U' \times \mathbb{R}^n$ na tangentnem svežnju $T\mathbb{R}^n$ preslika $TX|_U$ na množico

$$\phi(U \cap X) \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d) = (U' \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d)) \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d).$$

Torej se vsako vlakno T_pX ($p \in U \cap X$) preslika z lokalno svežnjsko karto $T\phi$ v standardni linearni podprostor $\mathbb{R}^m \times \{0\}^d \subset \mathbb{R}^n$. V takem primeru pravimo, da je TX *vektorski podsveženj* ranga m svežnja $T\mathbb{R}^n|_X \cong X \times \mathbb{R}^n$.

Analogno konstrukcijo lahko naredimo v splošnejšem primeru, ko je X podmnogoterost v poljubni mnogoterosti Y.

I.5 Algebraična konstrukcija tangentnega svežnja

Da se izognemo določenim nevsebinskim tehničnim težavam, se omejimo na primer, ko je X $\mathcal{C}^\infty$-mnogoterost. Definirajmo

$$\mathcal{C}^\infty_{p,X} = \text{ algebra zarodkov gladkih funkcij v } p \in X.$$

Tangentni prostor T_pX definiramo kot množico vseh operatorjev $v\colon \mathcal{C}_p^\infty \to \mathbb{R}$, ki so linearni in zadoščajo Leibnitzovemu pravilu

$$v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(0) + f(0) \cdot v(g).$$

Taki operatorji se imenujejo *derivacije* na algebri zarodkov $\mathcal{C}_{p,X}^\infty$. Torej bomo tangentne vektorje $v \in T_pX$ predstavili z derivacijami.

Oglejmo si sedaj osnovni primer $X = \mathbb{R}^n$, $p = 0 \in \mathbb{R}^n$. Vsako gladko funkcijo v okolici točke 0 lahko predstavimo v obliki

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0) + \sum_{j=1}^{n} x_j\, g_j(x_1, \ldots, x_n)$$

za neke gladke funkcije $g_1, \ldots, g_n$ v neki okolici 0. Z uporabo Leibnitzovega pravila za konstantni funkciji $f \equiv 1,\ g \equiv 1$ dobimo

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1 \cdot v(1) = 2v(1) \Rightarrow v(1) = 0 \Rightarrow v(\text{konst.}) = 0$$

Definiramo $v_j = v(x_j) \in \mathbb{R}$ (derivacija v deluje na koordinatni funkciji x_j).

$$v(f) = \underbrace{v(f(0))}_{=0} + \sum_{j=1}^{n} v(x_j) \cdot g_j(0) + \sum_{j=1}^{n} (x_j)|_0 \cdot v(g_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot g_j(0) = \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)(f) \Bigg|_{x=0}$$

S tem vidimo, da je vsaka derivacija na algebri $\mathcal{C}_{0,\mathbb{R}^n}^\infty$ predstavljena s smernim odvodom $\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ v smeri vektorja s komponetami $v_j = v(x_j)$. S tem dobimo izomorfizem $T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.

Sedaj definirajmo diferencial preslikave. Če je $f\colon X \to Y$ neka $\mathcal{C}^\infty$-preslikava gladkih mnogoterosti, potem je za vsak $p \in X$ preslikava

$$f^*\colon \mathcal{C}_{f(p),Y}^\infty \longrightarrow \mathcal{C}_{p,X}^\infty, \quad g \xmapsto{f^*} g \circ f$$

(povlek, 'pull-back') homomorfizem algeber zarodkov. Diferencial $df_p\colon T_pX \to T_{f(p)}Y$ definiramo kot njej dualno preslikavo: za vsako testno funkcijo $g \in \mathcal{C}_{f(p,Y}^\infty$ je

$$(df_p \cdot v)(g) \stackrel{def}{=} v(g \circ f).$$

Ni težko preveriti, da tako definiran diferencial in prirejena tangentna preslikava $TX \to TY$ zadoščata istim lastnostim, kot smo jih dobili pri geometrijski konstrukciji. S tem dobimo ekvivalentno konstrukcijo tangentnega funktorja. (Natančneje, algebraični tangentni funktor je naravna translacija geometrijskega tangentnega functorja.) V praksi pogosto uporabljamo oba pristopa, odvisno od vrste problema.

II.2 Vektorska polja

Definicija 22. Vektorsko polje na mnogoterosti X je prerez tangentnega svežnja, to je funkcija $v\colon X \to TX$, za katero je $v_p \in T_pX$, $\forall p \in X$.

Za vsak $p \in X$ izberemo nek tangentni vektor $v_p \in T_pX$.

Vektorsko polje v je razreda $\mathcal{C}^k$ (za nek $k \leq r$, če je $\mathcal{C}^k$ preslikava $X \to TX$.

Naj bo $X = U^{odprta} \subset \mathbb{R}^n$. Običajna oznaka:

$$v_x = (x, \underbrace{v_1(x), \ldots, v_n(x)}_{\in \mathbb{R}^n})$$

Uvedemo standardna koordinatna vektorska polja na $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \qquad \text{smerni odvodi v koordinatnih smereh.}$$

Za vsako točko $p \in \mathbb{R}^n$ so vektorji $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ standardna baza tangentnega prostora $T_p\mathbb{R}^n$. Vsako vektorsko polje na neki odprti množici $U \subset \mathbb{R}^n$ je linearna kombinacija koordinatnih polj:

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Koeficienti g_j so funkcije na U. Vektorsko polje je gladko razreda $\mathcal{C}^k$ natanko tedaj, ko so vse komponente g_j $\mathcal{C}^k$ funkcije.

Preslikave vektorskih polj z difeomorfizmom.

Naj bo $f\colon X \to Y$ $\mathcal{C}^r$-difeomorfizem in v vektorsko polje na X. Potem je $f_* v = w$ vektorsko polje na Y, določeno s pogojem

$$(f_* v)_{f(p)} = df_p \cdot v_p, \quad p \in X.$$

Če je vektorsko polje v razreda $\mathcal{C}^k$ za nek $k \leq r - 1$, potem je tu preslikano vektorsko polje $w = f_* v$ razreda $\mathcal{C}^k$.

Poseben primer: Naj bo (U, φ) lokalna karta na X. Obstajajo natanko določena vektorska polja $e_1, \ldots, e_n$ na $U \subset X$, tako da je

$$\varphi_* e_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

V vsaki točki $p \in U$ so vektorji $e_j|_p$ baza tangentnega prostora T_pX. Tako določena n-terica $(e_1, \ldots, e_n)$ se imenuje je *polje baz* na $TX|_U$ (angl.: frame field). Vsako vektorsko polje v na $U \subset X$ lahko enolično zapišemo v obliki

$$v_p = \sum_{j=1}^{n} v_j(p)\, e_j, \quad g_1, \ldots, g_n \colon U \to \mathbb{R}.$$

Če označimo $x = \phi(p) \in \mathbb{R}^n$, dobimo

$$\phi_* v|_x = \sum_{j=1}^{n} v_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x = \sum_{j=1}^{n} v_j(\phi^{-1}(x)) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x.$$

Naj bo $f = (f_1, \ldots, f_n) \colon D \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{difeo.} D' \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \overset{f}{\mapsto} y = (y_1, \ldots, y_n)$. Izberimo poljubno 'testno' funcijo $g \colon D' \to \mathbb{R}$. Po definiciji diferenciala in z uporabo verižnega pravila dobimo

$$\begin{aligned} f_* \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)(g) &= \frac{\partial}{\partial x_j}(g \circ f) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Ker to velja za vsako testno funkcijo g, dobimo

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}\ \frac{\partial}{\partial y_k}\bigg|_{f(x)}$$

Odtod vidimo, da predstavlja linearno preslikavo $f_* = df_x \colon T_x\mathbb{R}^n \to T_{f(x)}\mathbb{R}^n$ (diferencial) v standardnih bazah na tangentnih prostorih $T_x\mathbb{R}^n$, $T_{f(x)}\mathbb{R}^m$ ravno Jacobijeva matrika preslikave f:

$$\left[\tfrac{\partial f_k}{\partial x_j} \right]_{1 \le j,k \le n}$$

Tako definirana preslikava vektorskih polj obstaja tudi v nekaterih drugih primerih.

1. f difeomorfizem $X \overset{f}{\to} Y$, w vektorsko polje na Y, potem je

$$\begin{aligned} v &= f^* w && \text{povlek (pull-back) polja } w \text{ na } X \\ &= (f^{-1})_* w && \text{potisk (push-forward) z inverzno preslikavo} \end{aligned}$$

2. $f \colon X \to Y$ lokalni difeomorfizem $\Leftrightarrow$ $df_x \colon T_xX \overset{\cong}{\to} T_{f(x)}Y$ je linearni izomorfizem (izrek o inverzni preslikavi).
   Če je w $\mathcal{C}^k$ vektorsko polje na Y, potem obstaja natanko eno vektorsko polje v na X, da je $f_* v = w$. Torej je povlek $v = f^* w$ dobro definiran.

3. Recimo, da je $f\colon X \to Y$ regularen $\mathcal{C}^r$-krov, $r \geq 1$. Potem grupa $\Gamma = \mathrm{Deck}_f(X)$ krovnih translacij deluje na X prosto in povsem nezvezno ter je $Y = X/_\Gamma$. Naj bo v vektorsko polje na X. Kdaj obstaja $w = f_* v$ na Y? Pogoj:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow df_x \cdot v_x = df_{x'} \cdot v|_{x'} \iff \underbrace{\gamma_* v = v}_{d\gamma_x \cdot v(x) = v(\gamma(x))}, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Vektorsko polje v, ki zadošča lastnosti $\gamma_* v = v$, se imenuje γ-invariantno. Če to velja za vsak $\gamma \in \Gamma$ v neki grupi difeomorfizmov Γ mnogoterosti X, se imenuje v Γ-invariantno.

Primer 22. $\mathbb{R}^2$, Γ grupa translacij z 2 generatorjema, $\Gamma = \langle \gamma, \sigma \rangle$, npr. $\gamma(x,y) = (x+1, y)$, $\sigma(x,y) = (x, y+1)$. Vsako konstantno vektorsko polje

$$v = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

je Γ-invariantno. Torej obstaja vektorsko polje w na $\mathbb{R}^2/_\Gamma = T =$ (torus), prirejeno polju v glede na kvocientno projekcijo $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to T$. Integralne krivulje polja w so slike premic s smernim vektorjem $k = b/a$. Če je število k iracionalno, je slika vsake take premice povsod gosta v torusu.

4. Vektorsko polje vzdolž preslikave $X \xrightarrow{f} Y$. Naj bo v vektorsko polje na X in w vektorsko polje na Y. Polje w je prirejeno v vzdolž preslikave f, če velja $df_x \cdot v(x) = w(f(x))$ za vsak $x \in X$. Pogosto gledamo w kot polje na Y, ki je definirano samo vzdolž slike $f(x)$.

II.3 Tok vektorskega polja

Definicija 23. Naj bo v vektorsko polje na mnogoterosti X. $\mathcal{C}^r$ pot $\gamma\colon (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \to X$ se imenuje *integralna krivulja* (ali *tokovnica*) polja v, če velja

$$\dot\gamma(t) = \gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = v(\gamma(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pri tem je $\frac{\partial}{\partial t}$ koordinatno polje na $\mathbb{R}$. V lokalnih koordinatah $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$v = \sum_{j=1}^n v_j(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Pot $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ je integralna krivulja natanko tedaj, ko velja

$$\gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{j=1}^n \dot\gamma_j(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n v_j(\gamma(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Dobimo sistem navadnih diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned}\dot\gamma_1(t) &= v_1(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))\\ &\vdots\\ \dot\gamma_n(t) &= v_n(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))\end{aligned}$$

Eksistenčni izrek za navadne diferencialne enačbe: Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta, $v\colon D \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova preslikava. Potem za $\forall x^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0) \in D$ obstaja okolica $x^0 \in U \subset D$ te točke in število $t_0 > 0$, tako da ima zgornji sistem navadnih diferencialnih enačb skupaj z začetnim pogojem

$$\gamma(0) = x \in U$$

natanko eno rešitev $\gamma(t,x)$ za vsak $t \in (-t_0,t_0)$ in vsako začetno točko $x \in U$. Rešitev $\gamma\colon (-t_0,t_0)\times U \to \mathbb{R}^n$ je zvezna v (t,x), odvedljiva po spremenljivki t in njen t-odvod $\dot\gamma(t,x)$ je zvezen v $(t,x) \in (-t_0,t_0)\times U$.

Če je $v(x) = 0$ za nek $x \in X$, je tokovnica skozi to točko konstantna preslikava $\gamma(t,x) \equiv x$. Taki točki x pravimo *stacionarna* ali *singularna* točka vektorskega polja v.

Od sedaj dalje bomo lokalno rešitev zgornjega sistema navadnih diferencialnih enačb pisali v obliki $\phi_t(x)$ in jo imenovali *tok polja* v. Torej je za vsak fiksen $x \in X$ preslikava $t \mapsto \phi_t(x)$ tokovnica polja v, ki gre pričasu $t = 0$ skozi točko $\phi_0(x) = x$.

Primer 23. Linearno vektorsko polje na $\mathbb{R}^n$ je oblike

$$v(x) = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

kjer je A neka $n \times n$ matrika. Enačba toka je sistem linearnih parcialnih diferencialnih enačb prvega reda z začetnim pogojem:

$$\dot x = Ax, \quad x(0) = x^0.$$

Tok tega polja je podan z

$$\varphi_t(x) = e^{tA}x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k\right) x.$$

Tok je globalno definiran za vse $x \in \mathbb{R}^n$ in $t \in \mathbb{R}$, torej je vsako linearno vektosko polje kompletno.

Opomba: Včasih se za tok φ_t vektorskega polja v uporablja oznaka

$$\varphi_t(x) = e^{tv}x.$$

Motivacija je primera, ko je $v(x) = Ax$ linearno polje in $\varphi_t(x) = e^{tA}x$.

Definicija 24. Vektorsko polje v na mnogoterosti X se imenuje *povsem integrabilno* ali *kompletno*, če njegov tok $\varphi_t(x)$ obstaja za vsako začetno točko $x \in X$ in vsak $t \in \mathbb{R}$.

Primer 24. Na $\mathbb{R}$ opazujemo vektorsko polje $v(x) = x^2$. Enačba toka je $\dot{x} = x^2,\ x(0) = x_0$. Pri začetnemu pogoju $x_0 = 0$ dobimo konstanten tok $\phi_t(0) = 0$. Pri $x_0 \neq 0$ dobimo

$$\phi_t(x_0) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} = \frac{x_0}{1 - tx_0}.$$

Pričasu $t_0 = \frac{1}{x_0}$ ima funkcija $\phi_t(x_0)$ pol. Če je $x(0) > 0$, potem tok $\phi_t(x)$ obstaja za vse $-\infty < t < t_0$. Pri začetnemu pogoju $x_0 < 0$ tok $\phi_t(x_0)$ obstaja za vse $t_0 < t < +\infty$.

Lema 3. *Naj bo $f\colon X \to Y$ naj bo $\mathcal{C}^1$-preslikava, v vektorsko polje na X in w vektorsko polje na Y. Če velja $df_x v_x = w_{f(x)}$ za vsak $x \in X$, potem f preslika vsako tokovnico polja v v neko tokovnico polja w.*

Če sta vektorski polji v in w Lipschitzovi, sledi $f(\varphi_t(x)) = \psi_t(f(x))$, kjer je $\varphi_t(x)$ tok polja v in $\psi_t(y)$ tok polja w.

Dokaz. To je preprosta uporaba verižnega pravila. Preslikava $t \mapsto \psi_t(f(x))$ je očitno tokovnica polja w, ki je pri $t = 0$ v točki $f(x)$. Trdimo, da je tudi $t \mapsto f(\varphi_t(x))$ tokovnica polja w. Odvajamo in uporabimo verižno pravilo:

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi_t(x)) = df_{\varphi_t(x)} \cdot \frac{d\varphi_t}{dt}(x) = df_{\varphi_t(x)} \cdot v(\varphi_t(x)) = w(f(\varphi_t(x))).$$

To ravno pomeni, da je $t \mapsto f(\varphi_t(x))$ tokovnica polja w. Pri $t = 0$ je $f(\varphi_0(x)) = f(x)$.

Če sta vektorski polji v in w Lipschitzovi, potem iz enoličnosti integralnih krivulj sledi $f(\varphi_t(x)) = \psi_t(f(x))$. □

Trditev 7. *Tok $\varphi_t(x)$ poljubnega vektorskega polja v zadošča grupnemu pravilu:*

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_s(\varphi_t(x)) \quad \textit{(kjer sta obe strani definirani)}, \qquad \varphi_0 = \mathrm{Id}\,.$$

Dokaz. Fiksiramo točko x in število $s \in \mathbb{R}$, tako da je $\varphi_s(x)$ definiran. Definiramo

$$\gamma(t) = \varphi_{t+s}(x), \qquad \sigma(t) = \varphi_t(\varphi_s(x)).$$

Pri $t = 0$ dobimo $\gamma(0) = \varphi_s(x) = \sigma(0)$. Pišimo $u = t + s$. Z uporabo verižnega pravila dobimo:

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\varphi_{t+s}(x) = \frac{d\varphi}{du}(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} = v(\varphi_u(x)) = v(\varphi_{t+s}(x)) = v(\gamma(t)),$$

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\varphi}_t(\varphi_s(x)) = v(\varphi_t(\varphi_s(x)) = v(\sigma(t)).$$

Torej sta γ in σ tokovnici polja v, ki gresta pri $t = 0$ skozi isto točko. Iz enoličnosti sledi $\gamma = \sigma$. □

Iz enakosti

$$\mathrm{Id} = \varphi_0 = \varphi_{-t} \circ \varphi_t$$

sledi, da je za vsak fiksen t preslikava φ_t difeomorfizem svojega definicijskega območja $\Omega_t \subset X$ na območje $\varphi_t(\Omega_t) \subset X$, z inverzom $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$. Taka družina $\{\varphi_t\}$ se imenuje *lokalna eno-parametrična grupa difeomorfizmov.* (Beseda 'lokalna' se nanaša na dejstvo, da φ_t ni nujno definiran na vsem X.)

Če je vektorsko polje v kompletno, je $\varphi_t \colon X \to X$ difeomorfizem za vsak t. Družina

$$\{\varphi_t \colon t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Diff}(X)$$

se tedaj imenuje *enoparametrična grupa difeomorfizmov* mnogoterosti X.

Posledica 4. *Če je $M \subset X$ podmnogoterost in je v vektorsko polje na X, ki je tangentno na M v vsaki točki $x \in M$ (to je, $v(x) \in T_xM \subset T_xX$ za vsak $x \in X$), potem za vsak $x \in M$ velja $\varphi_t(x) \in M$ na definicijski domeni toka.*

Dokaz. Uporabimo lemo zgoraj za vložitev $f \colon M \hookrightarrow X$. Ker je polje v tangentno na M vzdolž M, določa vektorsko polje w na M z enačbo $w_x = v_x$ za $x \in M$. Torej je $f_* w = v$. Po lemi zgoraj preslika f tokovnice polja w v tokovnice polja v. Za vsako točko $x \in M$ je tokovnica polja w hkrati tudi tokovnica polja v, torej je enaka $t \mapsto \phi_t(x)$. Sledi $\phi_t(x) \in M$. □

Primer 25. $\mathbb{R}^2$: $v(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$
$\langle v, x^2+y^2 \rangle = (-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})(x^2+y^2) = -2xy + 2xy = 0$
Torej je polje v tangentno na vsako nivojnico funkcije x^2+y^2 (krožnice).

Izrek 13 (**Lokalni eksistenčni izrek**)**.** *Naj bo v Lipschitzovo vektorsko polje na gladki mnogoterosti X. Za vsako točko $x_0 \in X$ obstaja okolica $U_{x_0} \subset X$ in število $\varepsilon = \varepsilon_{x_0} > 0$, tako da je tok $\varphi_t(x)$ definiran za vsako začetno točko $x \in U_{x_0}$ in za vsak $t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Tok $\varphi_t(x)$ in njegov odvod $\dot\varphi_t(x)$ po t sta zvezni funkciji (t,x). Če je polje v gladko razreda $\mathbb{C}^r$, sta preslikavi ti dve preslikavi razreda $\mathcal{C}^r$.*

Iz izreka sledi, da za vsako kompaktno množico $K \subset X$ obstaja število $\epsilon > 0$, tako da je tok $\varphi_t(x)$ definiran za vsak $xqinK$ in $|t| \le \epsilon$.

Zaradi enoličnosti rešitev vidimo, da za vsak $x \in X$ obstaja največji odprt interval $I_x = (\alpha(x), \omega(x)) \subset \mathbb{R}$, $-\infty \le \alpha(x) < 0 < \omega(x) \le +\infty$, tako da je tok $\varphi_t(x)$ definiran $\forall t \in I_x$.

Fundamentalna domena toka φ_t je množica

$$\Omega = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \colon t \in I_x,\ \forall x \in X\}.$$

Očitno je $X \times \{0\} \subset \Omega$.

Z uporabo lokalnega eksistenčnega izreka ni težko videti naslednje.

Lema 4. *Funkcija* $\omega\colon X \to (0, +\infty]$ *je navzdol polzvezna, funkcija* $\alpha\colon X \to [-\infty, 0)$ *pa navzgor polzvezna. Odtod sledi, da je fundamentalna domena odprta množica v* $X \times \mathbb{R}$.

Trditev 8. *Če je za nek* $x \in X$ *velja* $\omega(x) < +\infty$, *potem za vsak kompakt* $K \subset X$ *obstaja število* $\varepsilon > 0$, *da* $\varphi_t(x) \notin K$ *če* $\omega(x) - \varepsilon < t < \omega(x)$. *Analogno velja v primeru* $\alpha(x) > -\infty$.

To pomeni: Če je $\omega(x) < +\infty$, potem $\varphi_t(x)$ zapusti vsak kompakt, ko t narašča proti $\omega(x)$.

Dokaz. Za vsak kompakt K obstaja število $\varepsilon > 0$, tako da tok $\varphi_t(y)$ obstaja za vsako začetno točko $y \in K$ in za vsak $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Recimo sedaj, da za nek $x \in X$ in nek $t \in (\omega(x) - \varepsilon, \omega(x))$ velja $\varphi_t(x) \in K$. Zaradi grupne lastnosti toka je

$$\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{t+s}(x), \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Če s izberemo blizu ε, dobimo $t + s > \omega(x)$, kar je v protislovju z definicijo števila $\omega(x)$. □

Posledica 5. *Če je* X *kompaktna mnogoterost brez roba (sklenjena), potem je vsako vektorsko polje na* X *kompletno.*

Posledica 6. (Izrek Lyapunova.) *Naj bo* $\rho\colon X \to \mathbb{R}$ *gladka funkcija izčrpanja, to je, za vsak* $c \in \mathbb{R}$ *je podnivojnica* $\{x \in X \colon \rho(x) \le c\}$ *kompaktna. Naj bo v vektorsko polje na* X, *ki zadošča pogoju* $d\rho_x \cdot v_x \le 0$ *za vse* x, *ki zadoščajo* $\rho(x) \ge c_0$ *za nek* $c_0 \in \mathbb{R}$. *Potem je vektorsko polje v kompletno v pozitivnem času, to je,* $\omega(x) = +\infty$ *za vsak* $x \in X$.

Dokaz. Z uporabo verižnega pravila dobimo:

$$\frac{d}{dt}\rho(\varphi_t(x)) = d\rho(\varphi_t(x)) \cdot \frac{d\varphi_t(x)}{dt} = d\rho(\varphi_t(x)) \cdot v(\varphi_t(x)) \le 0, \quad \text{če je } \rho(\varphi_t(x)) \ge c_0.$$

To pomeni, da funkcija $t \mapsto g(t) = \rho(\varphi_t(x))$ ne narašča na nobenem intervalu, na katerem je njena vrednost $\ge c_0$.

Izberemo poljubno točko $x \in X$. Nato izberemo število $c \ge c_0$, tako da je $\rho(x) \le c$. Iz zgornje lastnosti sledi

$$g(t) = \rho(\varphi_t(x)) \le c \quad \forall t \in [0, \omega(x)).$$

V nasprotnem primeru bi namreč obstajalo število $t_1 \in (0, \omega(x))$, da bi bilo $g(t_1) > c$. Ker je $g(0) = \rho(x) < c$, bi obstajala točka $t_2 \in (0, t_1)$, v kateri je $g(t_2) > c$ in $\dot{g}(t_2) > 0$. To je v protislovju z zgoraj dokazano lastnostjo.

Odtod sledi, da tok $\varphi_t(x)$ za $0 \le t < \omega(x)$ ostaja v kompaktni množici $\{\rho \le c\}$. Po prejšnji trditvi zaključimo, da je $\omega(x) = +\infty$. □

Primer 26. $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija izčrpanja
$v = -\frac{\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ Hamiltonsko polje funkcije ρ.
$v(\rho) \equiv 0 \Leftrightarrow v$ tangentno na nivojnice, te so kompaktne $\Rightarrow v$ kompletno.

II.4 Lokalna oblika vektorskega polja v nesingularni točki

Problem: Vektorsko polje želimo lokalno v okolici neke točke $p \in X$ čim bolj poenostaviti s primerno izbiro lokalnih koordinat.

Trditev 9. *Če je vektorsko polje v na X v neki točki $p \in X$ različno od 0, $v_p \neq 0$, potem obstaja lokalna karta (U, ψ) v okolici točke p, tako da je $\psi_* v = \frac{\partial}{\partial x_1}$ (koordinatno vektorsko polje na $\mathbb{R}^n$ v smeri prve spremenljivke x_1).*

Dokaz. V nekih lokalnih koordinatah smo na odprti okolici točke $0 \in \mathbb{R}^n$, $p \rightsquigarrow 0$,

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad v(0) \neq 0.$$

Z linearno zamenjavo koordinat dosežemo $v(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}|_0$. (Dovolj bi bilo zahtevati $v_1(0) > 0$.) Naj bo φ_t tok polja v. Definiramo preslikavo g v okolici $0 \in \mathbb{R}^n$ takole:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n).$$

Njen odvod po x_1 je enak

$$g_* \frac{\partial}{\partial x_1} \cong \frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n) = v(\varphi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)) = v(g(x)).$$

Torej preslika g koordinatno polje $\frac{\partial}{\partial x_1}$ v polje v. V točki $x = 0$ je

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = v(0) = (1, 0, \dots, 0).$$

Na hiperravnini $x_1 = 0$ je $g(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$ identiteta, zato je

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = (0, \dots, 1, \dots, 0), \qquad j = 2, \dots, n.$$

Torej je $dg(0) = \mathrm{Id}$. Po izreku o inverzni preslikavi je g difeomorfizem v neki okolici 0. Njen inverz $\psi = g^{-1}$ tedaj zadošča $\psi_* v = \frac{\partial}{\partial x_1}$. $\square$

Točke p, v katerih je $v(p) = 0$, se imenujejo kritične točke (ali singularne točke) polja v. V lokalnih koordinatah lahko vzamemo $p = 0 \in \mathbb{R}^n$. Tedaj je

$$v(x) = Ax + o(|x|), \qquad A \quad n \times n \text{ matrika}.$$

Členov višjega reda v splošnem ne moremo odpraviti z zamenjavo koordinat.

Npr., v polju $v(x) = x + \alpha x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ v splošnem ne moremo odpraviti člena αx^n.

Če je $c > 0$, $c \neq 1$, potem lahko z zamenjavo koordinat nelinearne člene v vektorskem polju $v(x) = cx + o(x)$ odpravimo in polje lineariziramo, to je, spremenimo ga v polje $x \mapsto cx$.

II.5 Komutator (Liejev oklepaj) vektorskih polj

Naj bosta v, w $\mathcal{C}^2$ vektorski polji na mnogoterosti X in g neka $\mathcal{C}^2$ funkcija na X. *Komutator* $[v, w]$ je diferencialni operator, ki ima na funkciji g naslednjo vrednost:

$$[v, w]\,(g) \stackrel{def}{=} v(w(g)) - w(v(g)) \quad \text{funkcija na } X$$

Preveri, da je preslikava $g \mapsto [v, w]\,(g)$ derivacija v vsaki točki:

- linearna v g (aditivna, $\mathbb{R}$-homogena)
- zadošča Leibnitzovemu pravilu.

Naredimo izračun komutatorja v $\mathbb{R}^n$:

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad w = \sum_{j=1}^{n} w_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$v(w(g)) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k(x)\frac{\partial g}{\partial x_k}\right) = \sum_{j,k=1}^{n}\left(v_j(x)\frac{\partial w_k}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_k} + v_j(x)w_k(x)\frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}\right)$$

$$w(v(g)) = \sum_{j,k=1}^{n}\left(w_j(x)\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_k} + w_j(x)v_k(x)\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k}\right).$$

V razliki se parcialni odvodi drugega reda $\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}$ krajšajo in dobimo:

$$[v, w]\,(g) = \sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} v_j(x)\frac{\partial w_k}{\partial x_j} - w_j(x)\frac{\partial v_k}{\partial x_j}}_{a_k(x)}\right)\frac{\partial g}{\partial x_k}$$

$$[v, w]\,(g) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{\partial g}{\partial x_k}.$$

Ker to velja za vsako testno funkcijo g, sledi

$$[v, w] = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n}(v(w_k) - w(v_k))\frac{\partial}{\partial x_k}$$

Primer 27. $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$. Splošneje,če sta v, w konstantni vektorski polji na $\mathbb{R}^n$ (s konstantni koeficienti), potem je $[v, w] = 0$.

Primer 28. $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $w = \frac{\partial}{\partial x_1} + h(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$, $[v, w] = \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}$.

Algebraične lastnosti komutatorja $[\cdot, \cdot]$ (domača naloga): Če sta v in w $\mathcal{C}^r$-vektorski polji, $r \geq 2$, potem je $[v, w]$ $\mathcal{C}^{r-1}$ vektorsko polje in velja:

1. Operacija je $\mathbb{R}$-linearna v obeh faktorjih:

$$\begin{aligned}
&[v_1 + v_2, w] = [v_1, w] + [v_2, w] \\
&[v, w_1 + w_2] = [v, w_1] + [v, w_2] \\
&[tv, w] = t\,[v, w]\,, \quad t \in \mathbb{R} \\
&[v, tw] = t\,[v, w]\,, \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2. $[fv, w] = f\,[v, w] - w(f)\,v$ za vsako gladko funkcijo f.

3. $[v, w] + [w, v] = 0$ (v posebnem: $[v, v] = 0$).

4. Jacobijeva identiteta:

$$\big[[u, v]\,, w\big] + \big[[w, u]\,, v\big] + \big[[v, w]\,, u\big] = 0.$$

Označimo z $\aleph(X)$ množico vseh gladkih vektorskih polj na gladki mnogoterosti X. To je $\mathbb{R}$-vektorski prostor. Z operacijo $[\cdot, \cdot]$ je $\aleph(X)$ Liejeva algebra.

Opomba. Operacija $(v, w) \mapsto [v, w]$ je "lokalna", to je, vrednost komutatorja $[v, w]$ v neki točki je odvisna le od vrednosti polj v, w v neki odprti okolici te točke.

Trditev 10. *Če je $f\colon X \to Y$ gladek difeomorfizem in sta v, w vektorski polji na X, potem velja*

$$f_*[v, w] = [f_*v, f_*w].$$

To pomeni, da je vseeno, v katerih koordinatah računamo komutator.

Dokaz. Izberimo gladko funkcijo g na Y. Po definiciji potiska f_*v velja

$$(f_*v)_{f(x)}(g) = v_x(g \circ f).$$

(Leva stran je vrednost vektorskega polja f_*v na funkciji g v točki $f(x)$, desna stran pa vrednost vektorskega polja v na funkciji $g \circ f$ v točki x.) Zgornjo identiteto lahko zapišemo v obliki

$$(f_*v)(g) \circ f = v(g \circ f).$$

Z večkratno uporabo tega dejstva dobimo:

$$\begin{aligned}
f_*[v,w](g)\circ f &= [v,w](g\circ f)\\
&= v(w(g\circ f) - w(v(g\circ f))\\
&= v((f_*w)(g)\circ f) - w((f_*v)(g)\circ f)\\
&= (f_*v)(f_*(w)(g)\circ f - (f_*w)(f_*v)(g)\circ f\\
&= (f_*v)(f_*(w)(g)\circ f - (f_*w)(f_*v)(g)\circ f\\
&= [f_*v, f_*w](g)\circ f.
\end{aligned}$$

Ker to velja za vsako gladko testno funkcijo g na Y, sledi $f_*[v,w] = [f_*v, f_*w]$. □

Opomba. Trditev 12 lahko posplošimo:

Če sta v, w vektorski polji na X in sta $\tilde{v}, \tilde{w}$ vektorski polji na Y, tako da za neko gladko preslikavo $f\colon X \to Y$ velja $df_x v_x = \tilde{v}_{f(x)}$ in $df_x w_x = \tilde{w}_{f(x)}$, sledi

$$df_x[v,w]_x = [\tilde{v}, \tilde{w}]_{f(x)}.$$

II.6 Liejev odvod vektorskega polja

To je odvod vektorskega (ali tenzorskega) polja vzdolž toka nekega vektorskega polja.

Naj bosta v in w vektorski polji na gladki mnogoterosti X. Označimo s $\varphi_t(x)$ tok polja v. Vemo, da je družina $\{\varphi_t\}$ lokalna grupa difeomorfizmov mnogoterosti X.

Definicija 25. Liejev odvod vektorskega polja w v smeri vektorskega polja v v točki $x \in M$ je definiran s predpisom

$$(L_v w)_x \stackrel{def}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^* w = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big((\varphi_t^* w)_x - w_x\big) \in T_x X.$$

Iz definicije sledi, da je $L_v w$ vektorsko polje.

Definicijo lahko posplošimo na primer, ko je w tenzorsko polje poljubnega tipa. Če je $w = f$ funkcija na M, je Liejev odvod enak

$$(L_v f)_x = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\varphi_t(x)) = v(f)(x) = df_x v_x,$$

torej je ravno diferencial funkcije f v smeri vektorja v.

Primer 29. Naj bodo $x = (x_1, \dots, x_n)$ koordinate na $\mathbb{R}^n$ in $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Njegov tok

$$\varphi_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n)$$

je paralelni premik v koordinatni smeri x_1. Diferencial $d\phi_t \colon T_x\mathbb{R}^n \to T_{\phi_t(x)}\mathbb{R}^n$ preslika tangentni vektorj $w = \sum_j w_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_x \in T_x\mathbb{R}^n$ na vektor $\sum_j w_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_{\phi_t(x)} \in T_{\phi_t(x)}\mathbb{R}^n$.

Izberimo vektorsko polje

$$w = \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Tedaj je

$$(\varphi_t^* w)_x = (d\varphi_{-t})_{\varphi_t(x)} w_{\varphi_t(x)} = \sum_{j=1}^{n} b_j(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_x$$

in zato je Liejev odvod enak

$$L_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial x_1}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, w \right]. \tag{II.6.1}$$

V tem primeru je torej Liejev odvod enak komutatorju.

Trditev 11. *Za vsak par vektorskih polj v, w velja identiteta*

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* w) = \varphi_t^*(L_v w)$$

na fundamentalni domeni polja v.

Dokaz. Pri $t = 0$ je to ravno definicija Liejevega odvoda.

Naj bo sedaj $t = s + u$, kjer $s \in \mathbb{R}$ fiksiramo in u spreminjamo. Velja

$$\varphi_t^* w = (\varphi_s \circ \varphi_u)^* w = \varphi_u^*(\varphi_s^* w).$$

Sedaj odvajamo po t pri $t = s$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \varphi_t^* w &= \frac{d}{du}\Big|_{u=0} \varphi_u^*(\varphi_s^* w) \\
&= L_v(\varphi_s^* w) \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{1}{u}(\varphi_u^*(\varphi_s^* w) - \varphi_s^* w) \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{1}{u} \left(\varphi_s^*(\varphi_u^* w - w)\right) \\
&= \varphi_s^* \left(\lim_{u \to 0} \frac{1}{u}(\varphi_u^* w - w) \right) \\
&= \varphi_s^*(L_v w).
\end{aligned}$$

V predzadnji enačbi smo upoštevali, da je ϕ_s^* linearna preslikava in zato komutira z limitnim prehodom. $\square$

Trditev 12. *Če je $f\colon X \to Y$ difeomorfizem in sta v, w vektorski polji na X, potem velja*

$$f_*(L_v w) = L_{f_* v}(f_* w)$$

To pomeni, da je izračun Liejevega odvoda neodvisen od izbire lokalnih koordinat na X.

Dokaz. Naj bo φ_t tok polja v na X in $\tilde{\varphi}_t$ tok polja $\tilde{v} := f_* v$ na Y. Potem velja

$$f \circ \varphi_t = \tilde{\varphi}_t \circ f.$$

Pišimo $\tilde{w} = f_* w$, kar je ekvivalentno $w = f^* \tilde{w}$. Uporabimo zgornjo identiteto za povlek vektorskega polja $\tilde{w}$. Po eni strani dobimo

$$(f \circ \varphi_t)^* \tilde{w} = \varphi_t^* \circ f^* \tilde{w} = \varphi_t^* w,$$

po drugi strani pa

$$(\tilde{\varphi}_t \circ f)^* \tilde{w} = (f^* \circ \tilde{\varphi}_t^*) \tilde{w}.$$

Ker sta izraza enaka, sledi

$$\varphi_t^* w = f^*(\tilde{\varphi}_t^* \tilde{w})$$

Odvajamo po t pri $t = 0$:

$$L_v w = f^* \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \tilde{\varphi}_t^* \tilde{w} \right) = f^*(L_{\tilde{v}} \tilde{w}).$$

To je očitno ekvivalentno $f_*(L_v w) = L_{\tilde{v}} \tilde{w}$, kar smo želeli dokazati. □

Sedaj bomo pokazali, da je Liejev odvod enak Liejevemu oklepaju.

Trditev 13. *Za vsak par vektorskih polj u, v velja*

$$L_v w = [v, w].$$

Dokaz. Iz trditev 10 in 12 sledi, da sta obe operaciji (komutator in Liejev odvod) neodvisni od izbire lokalnih koordinat.

Naj bo $p \in X$ taka točka, v kateri je $v_p \neq 0$. Potem obstajajo lokalne koordinate $x = (x_1, \dots, x_n)$ v okolici točke p, v katerih je v enako kooordinatnemu polje $\frac{\partial}{\partial x_1}$. V tem primeru smo željeno enakost že dokazali; glej (II.6.1).

Naj bo sedaj $p \in X$ taka točka, da velja $v_x = 0$ za vsako točko x v neki okolici točke p. V tem primeru je očitno $[v, w]_p = 0$. Poleg tega tok $\varphi_t(x) \equiv x$ na okolici $x \in U$ miruje, zato sledi tudi $L_v w|_p = 0$.

To pomeni, da željena enakost velja na odprti množici $\Omega = \{p \in X \colon v_p \neq 0\}$ in tudi na notranjosti njenega komplementa $X \setminus \Omega$; torej na komplementu roba $\partial\Omega$. Iz definicij sledi, da sta obe vektorski polji $[v, w]$ in $L_v w$ zvezni. Ker je rob množice Ω nikjer gost v X, sledi enakost v vseh točkah $p \in X$ po zveznosti. □

Posledica 7. *Za poljuben par vektorskih polj velja* $L_w v = -L_v w$.

Trditev 14. *Naj bo* φ_t *tok polja* v *in* ψ_s *tok polja* w. *Potem velja*

$$L_v w = 0 \Longleftrightarrow \varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t.$$

To pomeni, da polji v, w komutirata natanko tedaj, ko njuna tokova komutirata.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Odvajamo identiteto $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ po s pri $s = 0$ (t in x sta fiksni):

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \varphi_t(\psi_s(x)) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \psi_s(\varphi_t(x)) = w_{\phi_t(x)}.$$

Levo stran v zgornji identiteti lahko po verižnem pravilu izrazimo tudi takole:

$$(d\varphi_t)_x \cdot \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \psi_s(x) == (d\varphi_t)_x \cdot w_x.$$

S primerjavo dobimo

$$d\varphi_t|_x w_x = w|_{\varphi_t(x)} \Longleftrightarrow \varphi_t^* w \overset{t}{\equiv} w,$$

kar pomeni, da je polje w φ_t-invariantno. Z odvajanjem po t pri $t = 0$ sledi $L_v w = 0$.

($\Rightarrow$) Naj bo $L_v w = 0$. Iz trditve 11 sledi

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^* w = \varphi_t^*(L_v w) = \varphi_t^*(0) = 0.$$

Torej je vektorsko polje $\varphi_t^* w$ neodvisno od t in je zato enako $\phi_0^* w = w$. Za vsak fiksen t torej velja $(\phi_t)_* w = w$. Odtod sledi s pomočjo verižnega pravila, da difeomorfizemm ϕ_t preslika poljubno tokovnico $\psi_s(x)$ polja w, ki gre pri $s = 0$ skzi točko x, v drugo tokovnico, ki gre pri $s = 0$ skozi točko $\phi_t(x)$. To ravno pomeni $\phi_t(\psi_s(x)) = \psi_s(\phi_t(x))$. □

Poseben primer: $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $w = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Izračunali smo: $[v, w] = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial x_1}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \Leftrightarrow$ koeficienti b_j niso odvisni od x_1:

$$w = \sum_{j=1}^{n} b_j(x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

Evidentno: integralne krivulje so translacijsko invariantne v x_1-smer; če je $\psi_s(x)$ neka integralna krivulja polja w, potem je tudi

$$\varphi_t(\psi_s(x)) = \psi_s(x) + (t, 0, \ldots, 0) = \psi_s(x_1 + t, x_2, \ldots, x_n)$$

integralna krivulja polja w.

II.7 Komutirajoča polja in Frobeniusov izrek

Izrek 14. *Naj bodo $v_1, v_2, \ldots, v_m$ linearno neodvisna vektorska polja na mnogoterosti X, ki paroma komutirajo:*

$$[v_j, v_k] = 0, \quad j, k = 1, \ldots, m.$$

Potem ima vsaka točka $p \in X$ odprto okolico $U \subset X$ in lokalno karto $\psi \colon U \to \psi(U) = U' \subset \mathbb{R}^n$, tako da je

$$\psi_* v_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Obratno: če taka karta ψ obstaja, potem $\psi_*[v_j, v_k] = [\psi_* v_j, \psi_* v_k] = [\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}] = 0$.

Dokaz. V neki lokalni karti prevedemo na primer $X = \mathbb{R}^n$, $p = 0$. Naj bo

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad j = 1, \ldots, m$$

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo:

$$\det(a_{jk}(0))_{j,k=1}^{m} \neq 0.$$

Odtod sledi, da je $v_1(0), \ldots, v_m(0), \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ baza tangentnega prostora $T_0\mathbb{R}^n$. Naj bo φ_t^j tok polja v_j. Označimo $d := n - m$. Definiramo preslikavo $g(x)$ v okolici izhodišča $x = 0$ takole:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_{x_1}^1 \circ \ldots \circ \varphi_{x_m}^m (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

(Torej začnemo v točki $(0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ in gremo za čas x_j v smeri polja v_j za vsak $j = 1, \ldots, m$.) Izračunamo odvod po spremenljivki x_1:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi_{x_1}^1 \circ \varphi_{x_2}^2 \circ \ldots \circ \varphi_{x_m}^m (0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n)) = v_1(g(x))$$

Pri računanju odvoda po x_2 upoštevamo, da polji v_1 in v_2 komutirata:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_{x_2}^2 \circ \varphi_{x_1}^1 \circ \ldots \circ \varphi_{x_m}^m (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Enako kot prej sledi $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x) = v_2(g(x))$. Analogen sklep velja za ostale spremenljivke, torej je

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = v_j(g(x)), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Torej je $g_* \frac{\partial}{\partial x_j} = v_j$, $\forall j = 1, \ldots, m$.

Ker je $g(0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, sledi

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(0) = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = m+1, \ldots, n.$$

Torej je diferencial dg_0 neizrojen. Iz izreka o inverzni preslikavi sledi, da je g difeomorfizem v neki okolici 0 v $\mathbb{R}^n$. Naj bo $\psi = g^{-1}$ njegov inverz; tedaj je $\psi_* v_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. $\square$

Naj bo X gladka mnogoterost. Za vsak $x \in X$ naj bo $E_x \subset T_x X$ vektorski podprostor v $T_x X$, $\dim E_x = m = \operatorname{rang} E$ (neodvisen od x). Predpostavimo, da je E_x gladko odvisen od $x \in X$.

$$E = \bigsqcup_{x \in X} E_x \subset TX$$

Natančneje, zahtevajmo, da je E *gladek vektorski podsveženj tangentnega svežnja svežnja* TX, kar pomeni naslednje:

Vsaka točka $p \in X$ ima okolico $U \subset X$ in gladko sveženjsko karto $TX|_U \xrightarrow[\theta]{\cong} U \times \mathbb{R}^n$, $n = \dim X$, tako da je

$$\theta(E|_U)] = U \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d), \quad d = n - m.$$

Ekvivalentno: $\forall p \in X\ \exists U^{okolica}$ in m gladkih vektorskih polj $V_1, \ldots, V_m$ na U, tako da je

$$E_x = \operatorname{Lin}\{V_1(x), \ldots, V_m(x)\}$$

(V prejšnji definiciji: $V_j(x) = \theta^{-1}(x, (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)))$

Definicija 26. Podmnogoterost M v X je integralna podmnogoterost podsvežnja $E \subset TX$, če je $\forall x \in X$: $T_x M \subset E_x$.

Od tod sledi $\dim M \leq m = \dim E_x$.

Primer 30. $m = 1$. E lokalno definiran z vektorskim poljem V.
Integralna podmnogoterost E je neparametrizirana tokovnica polja E, le da hitrost gibanja ni bistvena.

Obstoj tokovnic vektorskega polja pove, da imamo vselej 1-dimenzionalne integralne podmnogoterosti.

Vprašanje: Kdaj obstajajo lokalne integralne podmnogoterosti M dimenzije $m = \operatorname{rang} E$?

Recimo, da je $M \subset X$ neka integralna podmnogoterost svežnja $E \subset TX$, $\dim M = m = \operatorname{rang} E$. Naj bodo $V_1, \ldots, V_m$ vektorska polja, ki napenjajo E na neki odprti množici $U \subset X$.

Trdimo: Vektorsko polje $[V_j, V_k]$ je tudi tangentno na E v točkah iz $U \cap M$.

Dokaz: Naj bodo $g_1, \ldots, g_d \colon U \to \mathbb{R}$ lokalne definicijske funkcije $M \cap U$.

$$[V_j, V_k](g_l) = V_j(V_k(g_l)) - V_k(V_j(g_l)), \quad V_k(g_l)|_{M\cap U} = 0,\ V_j(g_l)|_{M\cap U} = 0$$

$$\Longrightarrow [V_j, V_k](g_l) = dg_l[V_j, V_k] = 0 \text{ v točkah iz } M \cap U.$$

Ker to velja za vsak g_l, $l = 1, \ldots, d$, sledi

$$[V_j, V_k]|_x \subset \bigcap_{l=1}^{m} \ker(dg_l)_x = T_x M \quad \forall x \in M \cap U.$$

Odtod sledi, da je komutator $[V_j, V_k]$ linearna kombinacija polj $V_1, \ldots, V_m$ na $M \cap U$.

Zaključek: Če ima E integralne mnogoterosti dimenzije $m = \operatorname{rang} E$ skozi vsako točko $x \in X$, mora E zadoščati naslednjemu pogoju:

Definicija 27. Podsveženj $E \subset TX$ ranga m je involutiven, če ima vsaka točka $p \in X$ okolico $U \subset X$, na kateri je $E|_U$ generiran z gladkimi vektorskimi polji $V_1, \ldots, V_m$, tako da je vsak komutator $[V_j, V_k]$ spet polje, ki je tangentno na $E|_U$.

Opomba: Ker polja $V_1, \ldots, V_m$ generirajo $E|_U$, je pogoj v definiciji ekvivalenten

$$[V_j, V_k] = \sum_{l=1}^{m} a_{jkl} V_l, \quad j, k = 1, \ldots, m$$

za neke gladke funkcije a_{jkl} na U.

Naloga: Preveri, da je involutivnostni pogoj neodvisen od izbire lokalnih vektorskih polj $V_1, \ldots, V_m$, ki generirajo E.

Izrek 15 (Frobenius)**.** *Če je $E \subset TX$ involutiven podsveženj ranga m, potem lahko X razslojimo na disjunktno unijo podmnogoterosti $M_\alpha \subset X$ dimenzije* $\dim M_\alpha = m$, *tako da je vsaka M_α integralna podmnogoterost svežnja E.*

Taka razslojitev mnogoterosti na paroma disjunktne podmnogoterosti konstantne dimenzije se imenuje *foliacija.* Posamezna podmnogoterost v foliaciji se imenuje *list* foliacije. Vsak list je vsebovan v nekem natanko določenem maksimalnem listu.

Lokalno: Vsaka točka $p \in X$ ima okolico $U \subset X$ in lokalno karto $\varphi : U \xrightarrow{\cong} U' \subset \mathbb{R}^n$, tako da je $d\varphi_x(E_x) = \mathbb{R}^m \times \{0\}^d$.

Razslojitev: U je disjunktna unija nivojnih ploskev

$$\varphi_{m+1}(x) = c_{m+1},\ \varphi_{m+2}(x) = c_{m+2}, \ldots \varphi_n(x) = c_n,$$

kjer so $c_{m+1}, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ realna števila.

Dokaz. Fiksirajmo točko $p \in X$. Izberimo lokalne koordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$ v okolici p, v katerih je $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Naj bodo $V_1(x), \ldots, V_m(x)$ vektorska polja v okolici izhodišča, ki napenjajo E_x za vsak x. Z linearno zamenjavo koordinat dosežemo $V_j(0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_0$ za $j = 1, \ldots, m$. Naj bo

$$V_j(x) = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}(x) \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Za levi $m \times m$ minor matrike koeficientov velja $\det(a_{jl})_{j,l}^m \neq 0$ na neki okolici $x = 0$ (v točki $x = 0$ je to ravno identična matrika). Pomnožimo matriko koeficientov $(a_{jl})_{j=1,\ldots,m}^{l=1,\ldots,n}$ na levi z matriko $(a_{jl})_{j,l=1,\ldots,m}^{-1}$. Dobimo matriko koeficientov oblike

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & 1 & \end{array}\right]$$

Involutivnost se pri prehodu na novo bazo ohranja. Torej obstajajo vektorska polja oblike

$$W_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{l=m+1}^{n} b_{jl}(x) \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

ki generirajo E v neki okolici $0 \in \mathbb{R}^n$.

Ker je sveženj E involutiven, je komutator $[W_j, W_k]$ linearna kombinacija polj $W_1, \ldots, W_m$.

Preprost račun pokaže, da je komutator $[W_j, W_k]$ linearna kombinacija vektorskih polj $\frac{\partial}{\partial x_l}$, $l = m+1, \ldots, m$.

Od tod sledi z uporabo elementarne linearne algebre, da je

$$[W_j, W_k] = 0, \quad j, k = 1, \ldots, m.$$

Zato obstaja zamenjava difeomorfizem $x \mapsto g(x)$ v okolici $0 \in \mathbb{R}^n$, ki preslika vektorsko polje W_j v koordinatno polje $\frac{\partial}{\partial x_j}$ za vsak $j = 1, \ldots, m$; to je, $g_* W_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Odtod sledi, da so nivojne ploskve $g_k = c_k$, $k = m+1, \ldots, n$, maksimalne integralne podmnogoterosti svežnja E v neki okolici p. S tem dobimo lokalno razlojitev okolice točke $p \in X$ na integralne podmnogoterosti.

Globalno razslojitev dobimo s topološkimi argumenti (glej npr. [AMR] ali [B]). $\square$

Primer 31. $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$. Naj bo $E \subset T\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ podsveženj ranga 2.
Lokalno je E določen z dvema linearno neodvisnima vektorskima prostoroma V, W.
Kot v dokazu Frobeniusovega izreka:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\partial}{\partial x} + a(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z} \\ W &= \frac{\partial}{\partial y} + b(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Integralne ploskve so oblike $z = f(x,y)$. Ploskev parametriziramo $(x,y) \to (x,y,f(x,y))$.
Izračunamo odvoda:

$$\begin{aligned} \text{odvod po } x: &\quad \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} \\ \text{odvod po } y: &\quad \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Ker polji V in W generirata E, vidimo, da je ta ploskev integralna ploskev svežnja E natanko tedaj, ko je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x,y,f(x,y)), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = b(x,y,f(x,y)).$$

Ker je $f \in \mathcal{C}^2$ sta druga odvoda enaka:

$$\begin{gathered} f_{xy} = a_y + a_z f_y = a_y + a_z b \\ f_{yx} = b_x + b_z f_x = b_x + b_z a \\ f_{xy} - f_{yx} = a_y - b_x + a_z b - b_z a \equiv 0 \end{gathered}$$

Izračunajmo še komutator vektorskih polj V in W:

$$[V,W] = \big(b_x + ab_z - a_y - ba_z\big)\frac{\partial}{\partial z} = (f_{yx} - f_{xy})\frac{\partial}{\partial z}$$

Ta račun diretno pokaže, da vektorski polji V in W komutirata vzdolž vsake integralne ploskve; torej je neničelnost komutatorja ovira za obstoj integralni ploskev.

II.8 Liejeva vrsta toka vektorskega polja

Naj bo V vektorsko polje in φ_t njegov tok. Naj bo f gladka funkcija vzdolž tokovnice $\varphi_t(x)$.

$$t \mapsto f(\varphi_t(x)) \overset{Taylor}{=} f(x) + V_x(f)\cdot t + \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} f(\varphi_t(x))\frac{t^2}{2} + \dots$$

$$\frac{d}{dt}f(\varphi_t(x)) = df(\varphi_t(x))\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = df_{\varphi_t(x)}V_{\varphi_t(x)} = V(f)(\varphi_t(x))$$

Če f nadomestimo z $V(f)$ dobimo:

$$\frac{d^2}{dt^2}f(\varphi_t(x)) = \frac{d}{dt}V(f)(\varphi_t(x)) = V(V(f))(\varphi_t(x)) = V^2(f)(\varphi_t(x))$$

To je diferencialni operator drugega reda.

$$V = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad V(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$V(Vf) = \sum_{j,k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{d^k}{dt^k}f(\varphi_t(x)) = V^k(f)(\varphi_t(x)).$$

Torej:

$$f(\varphi_t(x)) = f(x) + V(f)(x)\,t + V^2(f)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + V^k(f)(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^k).$$

Uporabimo to formulo v primeru, ko je $V = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$, $f = x_j$ (j-ta koordinata), $\varphi_t(x) = (\varphi_{t,1}(x), \ldots, \varphi_{t,n}(x))$.

$$x_j \circ \varphi_t(x) = \varphi_{t,j}(x) = x_j + a_j(x)\,t + V(a_j)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + V^{k-1}(a_j)(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^k),$$

kjer smo uporabili

$$V(x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = a_j(x).$$

Liejeva vrsta toka je

$$\varphi_t(x) = x + V(x)t + V(a)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + V^{k-1}(a)(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^k).$$

Še en način, kako pridemo do komutatorja: Naj bo še W vektorsko polje in ψ_s njegov tok.

$$W = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \psi_s(x) = s + sb(x) + \frac{s^2}{2}W(b)(x) + \ldots$$

$$\begin{aligned}
\psi_s(\varphi_t(x)) &= \psi_s(x + a(x)t + V(a)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots) \\
&= x + a(x)t + V(a)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + sb(x + a(x)t + \ldots) + \frac{s^2}{2}W(b)(x + a(x)t + \ldots) + \ldots \\
&= x + ta(x) + sb(x) + st\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b(x)}{\partial x_j}\,a_j(x) + \ldots + o(t^2, s^2).
\end{aligned}$$

Opazimo, da je $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b(x)}{\partial x_j} a_j(x) = V(b)(x)$. Odtod sledi

$$\psi_s(\varphi_t(x)) = x + ta(x) + sb(x) + stV(b)(x) + o(t^2, s^2)$$
$$\varphi_t(\psi_s(x)) = x + ta(x) + sb(x) + stW(a)(x) + o(t^2, s^2)$$

Razlika:

$$\psi_s(\varphi_t(x)) - \varphi_t(\psi_s(x)) = st\big[V(b)(x) - W(a)(x)\big] + o(t^2, s^2) = st[V, W](x) + o(t^2, s^2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(\psi_s\varphi_t(x) - \varphi_t\psi_s(x))\bigg|_{s=t=0} = [V, W](x).$$

Domača naloga: Dokaži

$$[V, W](x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_{-\sqrt{t}} \circ \varphi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \varphi_{\sqrt{t}}(x).$$

Če $\sqrt{t}$ nadomestimo z $\operatorname{sign}(t)\sqrt{|t|}$, potem lahko vzamemo dvostranski odvod.

II.9 Grönwallova lema in ocena razdalje med tokovnicami

V tem razdelku bomo dokazali oceno za razdaljo med dvema tokovnicama vektorskega polja. Glavni rezultat je naslednji.

Izrek 16. *Denimo, da je $V = \sum a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ Lipschitzovo vektorsko polje z Lipschitzovo kontanto B na domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:*

$$|a(x) - a(y)| \leq B|x - y|, \qquad \forall x, y \in \Omega.$$

Potem za vse pare točk $x, y \in \Omega$ in za vsak $t \geq 0$, za katere je tok $\varphi_s(x)$, $\varphi_s(y)$ definiran na časovnem intervalu $s \in [0, t]$ in leži v Ω, velja naslednja ocena:

$$|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)| \leq e^{Bt}|x - y|. \tag{II.9.1}$$

V dokazu bomo uporabili naslednjo lemo.

Lema 5 (Grönwall)**.** *Naj bosta $f, g \colon [a, b) \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ zvezni funkciji. Denimo, da za neko število $A \geq 0$ in za vsak $t \in [a, b)$ velja neenakost*

$$f(t) \leq A + \int_a^t f(s)g(s)\, ds.$$

Potem velja

$$f(t) \leq A \exp\left(\int_a^t g(s)\,ds\right), \quad t \in [a,b).$$

Poseben primer: Če je funkcija g konstanta $g \equiv B \geq 0$, tedaj iz ocene

$$f(t) \leq A + B\int_a^t f(s)\,ds, \quad t \in [a,b),$$

sledi ocena

$$f(t) \leq Ae^{B(t-a)}.$$

Dokaz. Oglejmo si najprej primer $A > 0$. Označimo

$$h(t) = A + \int_a^t f(s)g(s)\,ds.$$

Predpostavka je torej $f(t) \leq h(t)$ za vsak $t \in [a,b)$. Ker je $g(t) \geq 0$, sledi odtod

$$\dot{h}(t) = f(t)g(t) \leq h(t)g(t) \Longrightarrow \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \leq g(t).$$

Z integriranjem dobimo odtod

$$\ln h(t) \leq \ln A + \int_a^t g(s)\,ds$$

in z eksponenciranjem še

$$f(t) \leq h(t) \leq A\exp\left(\int_a^t g(s)ds\right).$$

Z limitnim prehodom $A \searrow 0$ vidimo, da neenakost velja tudi za $A = 0$. $\square$

Dokaz (izreka 16)**.** Fiksirajmo točki $x, y \in \Omega$.

$$f(t) \stackrel{def}{=} |\varphi_t(x) - \varphi_t(y)|$$

$$\varphi_t(x) = \underbrace{\varphi_0(x)}_{=x} + \int_0^t \frac{d}{ds}\varphi_s(x)ds = x + \int_0^t a(\varphi_s(x))\,ds$$

$$\varphi_t(y) = y + \int_0^t a(\varphi_s(y))ds$$

$$\begin{aligned} f(t) = |\varphi_t(x) - \varphi_t(y)| &\leq |x-y| + \int_0^t |a(\varphi_s(x)) - a(\varphi_s(y))|ds \\ &\leq |x-y| + \int_0^t B|\varphi_s(x) - \varphi_s(y)|ds \\ &= |x-y| + \int_0^t Bf(s)ds \end{aligned}$$

Funkcija f zadošča predpostavki Grönwallove leme z $A = |x-y|$ in $B = g$. Sledi ocena $f(t) \leq |x-y|\, e^{Bt}$, kar je ravno neenakost II.9.1. □

II.10 Aproksimacija toka s pomočjo algoritma

V tem razdelku bomo pokazali, da lahko tok $\varphi_t(x)$ vektorskega polja približno izračunamo z iteracijami primerno izbrane preslikave. Ta rezultat ima poleg očitne praktične vrednosti tudi velik teoretičen pomen, še posebej v teoriji holomorfnih avtomomorfizmov kompleksnih evkliskih prostorv (glej poglavje 4 v [F]).

Definicija 28. Naj bo $V = \sum_{j=1}^n a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ vektorsko polje na odprti množici $D \subset \mathbb{R}^n$ in $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$. Naj bo Ω odprta množica v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, tako da je $D \times \{0\} \subset \Omega$. Preslikava $A\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathcal{C}^1$, ki zadošča pogojema

$$A(x,0) = x, \qquad \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{t=0}(x,t) = a(x), \qquad x \in D, \tag{II.10.1}$$

se imenuje *algoritem* za vektorsko polje V.

Iz definicije sledi

$$A(x,t) = x + ta(x) + o(t)$$

za vsak algoritem.

Najpreprostejši algoritem je kar preslikava $(x,t) \mapsto x + ta(x)$, ki je linearna v t.

Izrek 17. *Naj bo V Lipschitzovo vektorsko polje na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ s tokom φ_t. Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ fundamentalna domena toka. Če je $A(x,t) = A_t(x)$ algoritem za polje V, potem je za vsako točko $(x,t) \in \Omega$, $t \geq 0$, preslikava*

$$A_{\frac{t}{N}}^{(N)} \overset{def}{=} \underbrace{A_{\frac{t}{N}} \circ \ldots \circ A_{\frac{t}{N}}}_{N\text{-ti iterat}}$$

definirana v okolici točke x za vsa dovolj velika naravna števila $N > 0$ in velja

$$\varphi_t(x) = \lim_{N\to\infty} A^{(N)}_{\frac{t}{N}}(x)$$

Konvergenca je enakomerna na kompaktih v Ω.

Dokaz. Fiksirajmo točko $p \in \mathbb{R}^n$. Naj bo $t_0 > 0$ tako število, da tok $\phi_t(p)$ obstaja za vsak $t \in [0, t_0]$. Naj bo $C = \{\phi_t(p) \colon t \in [0, t_0]\}$ trajektorija. Izberimo kompaktni množici $L_1 \subset L_2 \subset \mathbb{R}^n$, tako da je $C \subset \mathring{L}_1$ and $L_1 \subset \mathring{L}_2$. Potem obstaja kompaktna okolica $K \subset \mathring{L}_1$ točke p, tako da za vsako točko $x \in K$ in za vse $t \in [0, t_0]$ velja $\phi_t(x) \in L_1$. Iz (II.10.1) sledi ocena $|\phi_t(x) - A_t(x)| = o(t)$ ko gre $t \to 0$, enakomerno za $x \in L_2$.

Fiksirajmo število $n \in \mathbb{N}$ in izberimo točko $x \in K$. Predpostavimo za trenutek, da orbita

$$y_0 = x,\ y_1 = A_{t/n}(y_0),\ y_2 = A_{t/n}(y_1), \ldots, y_n = A_{t/n}(y_{n-1}) \tag{II.10.2}$$

obstaja in leži v množici L_2. Če je $\beta > 0$ Lipschitzova konstanta polja V na L_2, potem iz izreka 16 sledi ocena

$$|\phi_t(x) - \phi_t(y)| \le \mathrm{e}^{\beta t}|x - y|.$$

Ker je $\phi_t(x) = \phi^n_{t/n}(x)$, sledi odtod

$$\phi_t(x) - A^n_{t/n}(x) = \sum_{j=1}^{n} \phi^{n-j}_{t/n}\left(\phi_{t/n}(y_{j-1})\right) - \phi^{n-j}_{t/n}\left(A_{t/n}(y_{j-1})\right).$$

Če uporabim oceno II.9.1 na vsak člen, dobimo

$$|\phi_t(x) - A^n_{t/n}(x)| \le \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\beta t(n-j)/n}|\phi_{t/n}(y_{j-1}) - A_{t/n}(y_{j-1})| \le n\mathrm{e}^{\beta t}o(t/n).$$

Pri $n \to \infty$ konvergira ta izraz proti 0 enakomerno na $x \in K$. Podobna ocena da

$$|\phi_{kt/n}(x) - A^k_{t/n}(x)| \le k\mathrm{e}^{\beta t}o(t/n), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Z induktivno uporabo te ocene vidimo, da za vsak dovolj velik $n \in \mathbb{N}$ orbita (II.10.2) obstaja in leži v množici L_2 za vsako točko $x \in K$ in za vsak $t \in [0, t_0]$. $\square$

Primer 32. Preslikava

$$A(x,t) = x + ta(x) + tb(x)$$

je algoritem za vsoto $V + W$ vektorskih polj $V = \sum a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$, $W = \sum b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Naj bo ϕ_t tok polja V in ψ_t tok polja W. Tedaj je tudi preslikava

$$A(x,t) = \psi_t(\varphi_t(x)) = x + ta(x) + tb(x) + o(t)$$

algoritem za vsoto polj $V + W$. Odtod sledi, da je tok θ_t vsote $V + W$ enak

$$\theta_t = \lim_{N\to\infty}\left(\psi_{\frac{t}{N}} \circ \varphi_{\frac{t}{N}}\right)^{(N)}.$$

Primer 33. Naj bo ϕ_t tok polja V in ψ_t tok polja W. Tedaj je tudi preslikava

$$A_t(x) = \psi_{-\sqrt{t}} \circ \phi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \phi_{\sqrt{t}}$$

algoritem za komutator $[V, W]$. Torej je tok θ_t komutatorja $[V, W]$ enak

$$\theta_t(x) = \lim_{N \to \infty} A_{t/N}^{(N)}(x).$$

Poglavje III

VEKTORSKI SVEŽNJI

III.1 Definicija in primeri

Naj bosta E in X $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti in $\pi\colon E \to X$ surjektivna $\mathcal{C}^r$ preslikava.

Definicija 29. Projekcija $\pi\colon E \to X$ je (realen) vektorski svežen ranga m in razreda $\mathcal{C}^r$, če ima vsako vlakno $E_x = p^{-1}(x)$ strukturo m-dimenzionalnega vektorskega prostora ($E_x \cong \mathbb{R}^m$) in je svežen lokalno trivialen: $\forall x_0 \in X\ \exists U^{okolica} \subset X$ in $\mathcal{C}^r$ difeomorfizem $\theta\colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^m$:

$$\begin{tikzcd}
\theta\colon \pi^{-1}(U) = E|_U \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & U \times \mathbb{R}^m \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

tako da je za vsak $x \in U$ preslikava $\theta_x\colon E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{pr_2} \mathbb{R}^m$ linearni izomorfizem.

Če $\mathbb{R}^m$ zamenjamo s $\mathbb{C}^m$, dobimo *kompleksni vektorski svežen* ranga m nad X.

Opomba: Iz definicije sledi, da so vektorske operacije na vlaknih (seštevanje in produkt s skalarji) gladko odvisne od bazne točke $x \in U$.

Mnogoterost X se imenuje *bazni prostor* ali *baza* svežnja;

mnogoterost E je *totalni prostor* svežja;

za vsako točko $x \in X$ je $E_x = \pi^{-1}(x)$ *vlakno* svežnja nad x.

Sveženjski atlas na E: $\mathcal{E} = \{(U_\alpha, \theta_\alpha)\colon \alpha \in A\}$, $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, $(\theta_\alpha, U_\alpha)$ je sveženjska karta na E. Prehodne preslikave: $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$.

$$\begin{tikzcd}
& E|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[dl, "\theta_\alpha"'] \arrow[dr, "\theta_\beta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m & & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m \arrow[ll, "\theta_{\alpha\beta}"]
\end{tikzcd}$$

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}, \qquad \theta_{\alpha\beta}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)\, v)$$

$$U_{\alpha\beta} \ni x \mapsto g_{\alpha\beta}(x) \in GL_m(\mathbb{R}) \text{ gladka } m \times n \text{ matrična funkcija}$$

Družina funkcij $g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to GL_m(\mathbb{R})$ je *1-kocikel*, kar pomeni, da zadošča pogojem:

1. $g_{\alpha\alpha} = I =$ identična matrika
2. $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} = I$
3. $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} = I$

Dva sveženjska atlasa na E sta ekvivalentna, če je njuna unija spet sveženjski atlas. Struktura vektorskega svežnja na E je določena z ekvivalenčnim razredom atlasa.

Izrek 18. *Za vsak 1-kocikel $(g_{\alpha\beta})$ na odprtem pokritju $\mathcal{U} = \{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ gladke mnogoterosti X, ki je podan z gladkimi preslikavami $g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \mapsto GL_m(\mathbb{R})$, obstaja gladek vektorski sveženj $E \xrightarrow{\pi} X$ s sveženjskim atlasom $\mathcal{E} = \{(U_\alpha, \theta_\alpha)\colon \alpha \in A\}$ in s prehodnimi preslikavami*

$$\theta_{\alpha\beta}(x, v) = \big(x, g_{\alpha\beta}(x)\, v\big), \quad x \in U_{\alpha\beta},\ v \in \mathbb{R}^m.$$

Dokaz. (Ideja)

$$E = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^m /_\sim$$

$$U_\beta \times \mathbb{R}^m \ni (x, v) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)\, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^m$$

Naredimo natančno te identifikacije $\forall \alpha, \beta \in A$.

Preveri: kocikelni pogoj zagotavlja, da je $\sim$ res ekvivalenčna relacija in da je E Hausdorffov.

Sveženjske karte: $U_\alpha \times \mathbb{R}^m \underset{\theta_\alpha}{\overset{\cong}{\rightleftarrows}} E|_{U_\alpha}$.

Preveri, da velja $\theta_{\alpha\beta}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)\, v)$. $\square$

III.2 Prerezi vektorskega svežnja

Naj bo $\pi\colon E \to X$ vektorski sveženj razreda $\mathcal{C}^r$.

Definicija 30. *Prerez* vektorskega svežnja $\pi\colon E \to X$ je preslikava $f\colon X \to E$, ki zadošča pogoju
$$\pi \circ f = \mathrm{Id}_X\,.$$
Ekvivalentno, za vsak $x \in X$ je $f(x) \in E_x = \pi^{-1}(x)$ točka v pripadajočem vlaknu nad x. Prerez je razred $\mathcal{C}^r$,če je $\mathcal{C}^r$ preslikava mnogoterosti X v mnogoterost E. (To ima smisel v primeru ko je sveženj $\pi\colon E \to X$ razreda $\mathcal{C}^r$.)
Prerez $0\colon X \to E$, ki vsaki točki $x \in X$ priredi ničelni element $0_x \in E_x$ vektorskega prostora E_x, se imenuje *ničelni prerez.*

S pomočjo ničelnega prereza lahko bazo X identificiramo s podmnožico $X_0 = \{0_x\colon x \in X\} \subset E$, ki je prav tako imenuje ničelni prerez.

Prostori prerezov in operacije:

Množico vseh zveznih prerezov $X \to E$ označimo z $\Gamma(X, E)$;

$\Gamma^r(X, E)$ označije množico vseh prerezov razreda $\mathcal{C}^r$.

Za poljubna prereza $f, g \in \Gamma(X, E)$ definiramo vsoto $f+g \in \Gamma(X, E)$ kot vsoto po točkah:
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in E_x \quad \text{(vsota na vlaknu } E_x).$$
Za vsak prerez $f \in \Gamma(X, E)$ in vsako funkcijo $\chi\colon X \to \mathbb{R}$ definiramo prerez $\chi f \in \Gamma(X, E)$ s predpisom
$$(\chi f)(x) = \chi(x) f(x) \in E_x.$$

Torej je $\Gamma(X, E)$ vektorski prostor in modul nad kolobarjem $\mathcal{C}(X)$ zveznih funkcij na X.

Če je $E \to X$ razreda $\mathcal{C}^r$, je $\Gamma^r(X, E)$ modul nad kolobarjem $\mathcal{C}^r(X)$ funkcij razreda $\mathcal{C}^r$.

Prerezi trivialnega svežnja $E = X \times \mathbb{R}^n$ so oblike $f(x) = (x, g(x))$, kjer je $g\colon X \to \mathbb{R}^n$ preslikava baze X v vlakno $\mathbb{R}^n$. Na ta način prereze trivialnega svežnja pogosto kar identificiramo s preslikavami baze v vlakno:
$$\Gamma(X, X \times \mathbb{R}^n) \cong \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n); \quad \Gamma^r(X, X \times \mathbb{R}^n) \cong \mathcal{C}^r(X, \mathbb{R}^n).$$

Prerezi v lokalni kartah: Naj bo $\mathcal{E} = \{(U_\alpha, \theta_\alpha)\colon \alpha \in A\}$ sveženjski atlas na E, kjer je $\theta_\alpha\colon E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, s prehodnimi preslikavami

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}, \qquad \theta_{\alpha\beta}(x, v) = \big(x, g_{\alpha\beta}(x)\, v\big).$$

V lokalnih karti $E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ je prerez f podan s funkcijo $f_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Kompatibilitetni pogoji nam povedo:

$$f_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x) f_\beta(x) \quad \forall x \in U_{\alpha\beta}.$$

Velja tudi obratno: Vsaka kolekcija preslikav $f_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ $(\alpha \in A)$, ki zadošča zgornjim pogojem, določa prerez $f\colon X \to E$.

Če je f v nekem atlasu določen s kolekcijo funkcij (f_α) in je prerez f' določen s kolekcijo (f'_α), je vsota $f + f'$ določena s kolekcijo $(f_\alpha + f'_\alpha)$ in je χf določen s kolekcijo (χf_α).

III.3 Morfizmi vektorskih svežnjev

Nad isto bazo X: Naj bosta $\pi\colon E \to X$, $\pi'\colon E' \to X$ $\mathcal{C}^r$ vektorska sveženja nad X.

Morfizem razreda $\mathcal{C}^r$ prvega svežnja E v drug sveženj E' je $\mathcal{C}^r$ preslikava $\Phi\colon E \to E'$, ki zadošča pogoju $\pi' \circ \Phi = \pi$, to je, naslednji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[r, hook] & E \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & E' \arrow[dl, "\pi'"] & \mathbb{R}^{m'} \arrow[l, hook'] \\
& & X & &
\end{tikzcd}$$

in je za vsak $x \in X$ preslikava $\Phi_x\colon E_x \to E'_x$ linearna na vlaknih.

Jedro in slika morfizma:

$$\begin{aligned}
\ker \Phi &= \{v \in E_x\colon x \in X,\ \Phi_x(v) = 0_x \in E'_x\} \subset E \\
\operatorname{im} \Phi &= \Phi(E) \subset E'.
\end{aligned}$$

Očitno so vlakna $\ker \Phi$ vektorski podprostori v vlaknih svežnja E, vlakna $\operatorname{im} \Phi$ pa so vektorski podprostori v vlaknih svežnja E'. Velja

$$\dim(\ker \Phi_x) + \dim(\operatorname{im} \Phi_x) = m = \operatorname{rang} E, \quad x \in X,$$

toda posamezni dimenziji sta lahko odvisni od točke x.

Vsak morfizem je v lokalnih sveženjskih kartah podan z množenjem z matrično funkcijo.

$$\begin{tikzcd} E|_U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\theta"'] & E'|_U \arrow[d, "\theta'"] \\ U \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "\tilde{\Phi}", "\theta'\circ\Phi\circ\theta^{-1}"'] & U \times \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$$\tilde{\Phi}(x,v) = (x, \varphi(x)\,v), \quad U \ni x \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}^{m\times m} \; m \times m\text{-dimenzionalna matrika}$$

Vprašanje: kdaj je $\ker\Phi$ podsveženj v E? Kdaj je $\operatorname{im}\Phi$ podsveženj v E?

Odgovor: natanko tedaj, ko so vlakna konstantne dimenzije. (Glej vaje.)

Morfizmi vektorskih svežnjev v lokalnih sveženjskih kartah:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{(U_\alpha, \theta_\alpha) \colon \alpha \in A\} && \text{sveženjski atlas na } E \\ \mathcal{E}' &= \{(U_\alpha, \theta'_\alpha) \colon \alpha \in A\} && \text{sveženjski atlas na } E' \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} E|_{U_\alpha} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\theta_\alpha"', "\cong"] & E'|_{U_\alpha} \arrow[d, "\theta'_\alpha"] \\ U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "\tilde{\Phi}"'] & U_\alpha \times \mathbb{R}^{n'} \end{tikzcd}$$

$$\tilde{\Phi}(x,v) = (x, \varphi_\alpha(x)v)$$

$$\varphi_\alpha(x) = \text{ matrična } n \times n' \text{ funkcija za } x \in U_\alpha$$

Φ je določena s kolekcijo preslikav

$$\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to M^{n'\times n} \quad \forall \alpha \in A$$

Kdaj taka kolekcija $\{\varphi_\alpha\}$ določa morfizem $\Phi \colon E \to E'$?
Naj bo U_β neka druga množica našega pokritja, $\varphi_\beta \colon U_\beta \to M^{n'\times n}$. Zanima nas zveza med φ_α in φ_β na $U_{\alpha\beta}$. V E:

$$\begin{tikzcd} (x,v) \arrow[d, "\cong"', "\theta_{\alpha\beta}=\theta_\alpha\circ\theta_\beta^{-1}"] & \in U_\beta \times \mathbb{R}^n, & x \in U_{\alpha\beta} \\ (x, g_{\alpha\beta}(x)v) & \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

$$g_{\alpha\beta} \colon U_{\alpha\beta} \mapsto GL_n(\mathbb{R}) \qquad \text{(1-kocikel prehodnih preslikav)}$$

Preslikamo to točko s Φ. V karti U_β je to

$$U_\beta \times \mathbb{R}^n \ni (x,v) \mapsto (x, \varphi_\beta(x)v) \in U_\beta \times \mathbb{R}^{n'}.$$

Ta vektor ustreza vektorju $(x, g'_{\alpha\beta}(x)\varphi_\beta(x)v)$ v karti $U_\alpha \times \mathbb{R}^{n'}$ za E'. Zaradi identifikacij v svežnju je to isti vektor kot

$$(x,v) \xmapsto[U_\alpha \text{ na } E]{\text{prehod v karto}} (x, g_{\alpha\beta}(x)v) \xmapsto[\text{v karti } U_\alpha]{\Phi} (x, \varphi_\alpha(x) g_{\alpha\beta}(x)v)$$

Torej kolekcija matričnih funkcij $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to M^{n' \times n}$ določa morfizem $\Phi \colon E \to E'$ (glede na izbrani par atlasov na E, E') natanko tedaj, ko velja

$$g'_{\alpha\beta}(x)\varphi_\beta(x) = \varphi_\alpha(x) g_{\alpha\beta}(x), \quad \forall x \in U_{\alpha\beta},\ \forall \alpha, \beta \in A.$$

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\varphi_\alpha", "(x,v)\mapsto(x,\varphi_\alpha(x)v)"'] & & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^{n'} \\
E|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[u, "\theta_\alpha"] \arrow[d, "\theta_\beta"'] \arrow[rr, "\Phi"] & & E'|_{U'_{\alpha\beta}} \arrow[u, "\theta_\alpha"'] \arrow[d, "\theta'_\beta"] \\
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \arrow[uu, bend left=60, "\theta_{\alpha\beta}"] \arrow[rr, "\varphi_\beta"] & & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^{n'} \arrow[uu, bend right=60, "\theta'_{\alpha\beta}"']
\end{tikzcd}$$

Morfizem Φ je izomorfizem natanko tedaj, ko je $n = n'$ in $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \mapsto GL_n(\mathbb{R})$ ter

$$g'_{\alpha\beta}\varphi_\beta = \varphi_\alpha g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow g'_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha g_{\alpha\beta} \varphi_\beta^{-1}.$$

Od tod vidimo, da 1-kocikla $(g_{\alpha\beta})$ in $(g'_{\alpha\beta})$ (na istem pokritju) določata "isti" svežen do izomorfizma natančno natanko tedaj, ko obstaja 0-koveriga $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \mapsto GL_n(\mathbb{R})$, tako da velja $g'_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha g_{\alpha\beta} \varphi_\beta^{-1}$. Včasih označimo $d' = g\Box\varphi$ ("twisting cocycle g by the cochain φ").

Definiramo kohomološko grupo $H^1(\mathcal{U}, GL_n(\mathbb{R}))$ kot grupo ekvivalenčnih razredov 1-kociklov $g = (g_{\alpha\beta})$ na $\mathcal{U}$, z vrednostmi v $GL_n(\mathbb{R})$, po relaciji $g \sim g' \Leftrightarrow g' = g\Box\varphi$ za neko 0-koverigo φ. $H^1(\mathcal{U}, GL_n(\mathbb{R}))$ je prostor izomorfnostnih razredov vektorskih svežnjev ranga n na X, ki so trivialni nad vsako množico $U_\alpha \in \mathcal{U}$. Imenuje se *prva Čechova kohomološka grupa na $\mathcal{U}$ s koeficienti v $GL_n(\mathbb{R})$*. Podobno je $H^1(\mathcal{U}, GL_n(\mathbb{C}))$ prostor izomorfnostnih razredov kompleksnih vektorskih svežnjev nad X.

Prva kohomološka grupa mnogoterosti X s koeficienti v $GL_n(\mathbb{C})$ je definirana kot direktna limita

$$H^1(X, GL_n(\mathbb{R})) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, GL_n(\mathbb{R})),$$

kjer opazujemo prehode na finejša pokritja. Tega pojma ne bomo natančneje definirali (glej literatiro iz kohomološke algebre).

Brez dokaza navedemo naslednji izrek.

Izrek 19. *Če je mnogoterost X kontraktibilna, potem je vsak vektorski svežnj $E \to X$ trivialen, to je izomorfen produktnemu svežnju $X \times \mathbb{R}^n$.*

Primer 34. $X = S^n = n$-sfera $= U^+ \cup U^-$, kjer sta $U^\pm$ odprti hemisferi, ki se prekrivata vzdolž ekvatorja. Vsaka od množic $U^\pm$ je difeomorfna odprti n-krogli, torej tudi $\mathbb{R}^n$.
$U^+ \cap U^- \cong S^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$
$E \to X$ vektorski svežen ranga m, $E|_{U^+} \cong U^+ \times \mathbb{R}^m$, $E|_{U^-} \cong U^- \times \mathbb{R}^m$.
E določen s prehodno preslikavo g:

$$g\colon U^+ \cap U^- \cong S^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to GL_m(\mathbb{R})$$

Dejansko je določen že s homotopnim razredom te preslikave, torej s preslikavo $S^{n-1} \to GL_m(\mathbb{R})$.
V posebnem primeru $n = 2, m = 2$: $S^1 \to GL_2(\mathbb{R})$: homotopni razredi preslikav $S^1 \to GL_2(\mathbb{R})$ sestavljajo prvo fundamentalno grupo $\pi_1(GL_2(\mathbb{R})) \cong \pi_1(O(2)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Vprašanje: kateremu številu pripada tangentni svežen TS^2 sfere?

Primer 35. Univerzalni svežen.
$G_{k,n}$ mnogoterost vseh k-dimenzionalnih realnih vektorskih podprostorov v $\mathbb{R}^n$
$G_{k,n}$ mnogoterost vseh k-dimenzionalnih kompleksnih vektorskih podprostorov v $\mathbb{C}^n$

$$U_{k,n} = \{(\lambda, v) \in G_{k,n} \times \mathbb{R}^n \colon v \in \lambda\} \subset G_{k,n} \times \mathbb{R}^n$$

Naloga: pokaži, da je $U_{k,n}$ realno analitičen vektorski podsvežen v $G_{k,n} \times \mathbb{R}^n$.
V kompleksnem: $U_{k,n}(\mathbb{C}) \to G_{k,n}(\mathbb{C})$ holomorfen vektorski podsvežen v $G_{k,n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$.
Poseben primer: $G_{1,n+1} = \mathbb{RP}^n$, $G_{1,n+1} = \mathbb{CP}^n$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, hook] & U_{1,n+1} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, hook] & U_{1,n+1} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{CP}^n \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} U_{1,n+1}(\mathbb{C}) &= \{([z_0\colon \dots \colon z_n], (v_0, \dots, v_n)) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \colon z_i v_j = z_j v_i \ \forall i, j\} \\ &= \{[z_0\colon \dots \colon z_n], (z_0, \dots, z_n)) \colon (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}_*\} \cup (\text{ničelni prerez}) \end{aligned}$$

Naloga: poišči trivializacijo $U_{k,n}|_{U_j} \cong U_j \times \mathbb{C}$ nad množico

$$U_j = \{[z_0\colon \dots \colon z_n] \in \mathbb{CP}^n, z_j \neq 0\} \cong \mathbb{C}^n$$

in prehodne preslikave.

III.4 Podsvežnji in kvocientni svežnji, eksaktna zaporedja, dualni svežen

Naj bo $E \to X$ vektorski svežen ranga n nad X. Izberimo število $m \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Definicija 31. Podmnožica $E' \subset E$ je *vektorski podsveženj ranga m* svežnja E, če je za vsako točko $x \in X$ množica E_x k-dimenzionalen vektorski podprostor v E_x in je E' *lokalno trivialen* v naslednjem smislu: Za vsako točko $p \in X$ obstaja okolica $p \in U \subset X$ in sveženjska karta $\theta\colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^n$, tako da velja

$$\theta(E'|_U) = U \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d), \quad n = m + d.$$

Vsaka taka sveženjska karta na E je *izbrana* glede na E'. Kolekcija vseh izbranih sveženjskih kart definira na E' strukturo vektorskega svežnja ranga m nad X.

Analogno definiramo pojem *kompleksnega vektorskega podsvežnja* v kompleksnem vektorskem svežnju.

Naj bo $E' \subset E$ vektorski podsveženj kot zgoraj.

Kvocientni sveženj $E/_{E'}$ je definiran takole:

$$E/_{E'} = \bigsqcup_{x \in X} E_x/_{E'_x}.$$

Če je θ izbrana sveženjska karta na $E|_U$ (glede na E'), potem θ inducira bijekcijo

$$(E/_{E'}|_U) \underset{\tilde{\theta}}{\overset{\cong}{\to}} U \times \mathbb{R}^d = U \times \underbrace{\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}^m \times \{0\}^d}}_{\mathbb{R}^d}$$

Preslikavo $\tilde{\theta}$ vzamemo za sveženjsko karto na $E'' = E/_{E'}$.

Naloga: Preveri, da tako dobimo sveženjski atlas na E''.

Zaporedje morfizmov

$$0 \longrightarrow E' \underset{\iota}{\overset{\text{inkl.}}{\hookrightarrow}} E \underset{\tau}{\overset{\text{kvoc.}}{\longrightarrow}} E'' \longrightarrow 0$$

se imenuje *kratko eksaktno zaporedje morfizmov vektorskih svežnjev.* To pomeni, da je ι injektivna, τ surjektivna in $\ker \tau = \operatorname{im} \iota$.

Zaporedje morfizmov vektorskih svežnjev

$$\cdots \longrightarrow E_{k-1} \overset{\Phi_{k-1}}{\longrightarrow} E_k \overset{\Phi_k}{\longrightarrow} E_{k+1} \longrightarrow \ldots$$

je *kompleks*,če so jedra $\ker \Phi_k \subset E_k$ in slike $\operatorname{im} \Phi_{k-1} \subset E_k$ podsvežnji ($\Leftrightarrow$ rang $\Phi_{k,x}$ neodvisen od bazne točke $x \in X$) inče velja

$$\Phi_k \circ \Phi_{k-1} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{im} \Phi_{k-1} = \ker \Phi_k, \quad \forall k.$$

Zaporedje se imenuje *eksaktno*, če velja

$$\ker \Phi_k = \operatorname{im} \Phi_{k-1}, \quad \forall k.$$

Praktično vse "naravne" funktorje na kategoriji *Vec* vektorskih prostorov in linearnih preslikav lahko posplošimo na svežnje. Naj bo Φ nek kovarianten funktor na kategoriji *Vec*:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "l"] & \Phi(V) \arrow[d, "\Phi(l)"] \\
V' \arrow[r, rightsquigarrow] & \Phi(V)
\end{tikzcd}$$

Pri kontravariantnem funktorju imamo obrnjene puščice $\uparrow$.
Denimo, da je $E \to X$ vektorski sveženj nad X. Definiramo prirejen sveženj

$$\Phi(E) \to X, \quad \Phi(E) = \bigsqcup_{x \in X} \Phi(E_x).$$

Na primer, vsakemu vektorskemu prostoru V priredimo njegov dualni prostor $V^* = \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R})$ (prostor linearnih funkcionalov na V). To je kontravarianten funktor:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "l"] & V^* \ni \lambda \circ l \\
V' \arrow[r, rightsquigarrow] & (V')^* \ni \lambda \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Dualni sveženj: $E^* = \bigsqcup\limits_{x \in X} E_x^*$.
Vsaki sveženjski karti $\theta \colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^n$ na E priredimo sveženjsko karto v E^*:

$$\theta^* \colon U \times (\mathbb{R}^n)^* = U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E^*|_U$$

$\theta_x^* \colon \{x\} \times (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\cong} E_x^*$ je dual preslikave $\theta_x \colon E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$.
Inverz $(\theta^*)^{-1} \colon E^*|_U \to U \times \mathbb{R}^n$ je sveženjska karta na E^*.

III.5 Kotangentni sveženj in diferencialne 1-forme

Kotangentni sveženj T^*X gladke mnogoterosti je dualni sveženj tangentnega svežnja TX:

$$T^*X = (TX)^* = \bigsqcup_{x \in X} T_x^* X$$

Modelni primer: $X = \mathbb{R}^n$. Elementi $T_0^*\mathbb{R}^n$ so linearni funkcionali $\lambda\colon T_0\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$T_0\mathbb{R}^n \ni v = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}$$

Vsaka gladka funkcija g v okolici točke 0 v $\mathbb{R}^n$ določa funkcional na $T_0\mathbb{R}^n$ s predpisom

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \longmapsto v(g) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial g}{\partial x_j}(0) = dg_0 v.$$

Ta funkcional je torej diferencial dg_0 funkcije g v točki 0.
Če je $g(x) = x_k$, dobimo $\langle dx_k, v\rangle = v(x_k) = v_k$; torej

$$\langle dx_k, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Torej tvorijo diferenciali $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ koordinatnih funkcij bazo kotangentnega prostora $T_0^*\mathbb{R}^n$, ki je dualna standardni bazi $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ tangentnega prostora $T_0\mathbb{R}^n$.
Vsak element $\lambda \in T_0^*\mathbb{R}^n$ je oblike

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j dx_j = d\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right).$$

Diferencialne 1-forme. Prerezi kotangentnega svežnja se imenujejo diferencialne 1-forme. Na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ je vsaka 1-forma oblike

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) dx_j,$$

kjer so $a_j(x)$ funkcije na D.

Integral diferencialne 1-forme po poti $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ $(t \in [0,1])$ je

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^1 \langle \alpha(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(\gamma(t))\dot x_j(t)\right) dt.$$

V klasični analizi je to krivuljni integral vektorskega polja $(a_1(x), \ldots, a_n(x))$.

Naj bo $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p \in U$. Zanima nas ekspliciten izraz za dualno preslikavo

$$(df_p)^*\colon T^*_{f(p)}\mathbb{R}^m \longrightarrow T_p^*\mathbb{R}^n$$

diferenciala $df_p\colon T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$. Naj bo $\lambda \in T^*_{f(p)}\mathbb{R}^m$. Po definiciji dualne preslikave je

$$\langle f_p^*(\lambda), v\rangle = \langle \lambda, df_p\, v\rangle.$$

Uporabimo ta predpis na standardni bazi $\lambda = dy_k$, $v = \frac{\partial}{\partial x_i}$:

$$\left\langle f_p^*(dy_k), \frac{\partial}{\partial x_i}\right\rangle = \left\langle dy_k, df_p \frac{\partial}{\partial x_i}\right\rangle = \left\langle dy_k, \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\frac{\partial}{\partial y_j}\right\rangle = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(p).$$

Odtod sledi razvoj po bazi

$$f_p^*(dy_k) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(p)dx_i = (df_k)_p = d(y_k \circ f)_p, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Naj bo $\lambda = \sum \lambda_k dy_k = d(\sum \lambda_k y_k)$. (Vsak kovektor $\lambda \in T^*_{f(p)}\mathbb{R}^m$ je te oblike.)

$$f_p^*(\lambda) = \sum_{k=1}^m \lambda_k f_p^*(dy_k) = \sum_{k=1}^m \lambda_k d(y_k \circ f)_p = d\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k y_k \circ f\right)_p$$

Za linearno funkcijo $g = \sum_{k=1}^m \lambda_k y_k$ smo torej dokazali pravilo

$$f_p^*(dg) = d(g \circ f)_p.$$

Ker lahko vsako funkcijo g v okolici točke $f(p)$ zapišemo kot vsoto

$$g(y) = c + \sum_{k=1}^m \lambda_k y_k + o(|y - f(p)|)$$

za primerno izbrano konstanto c in je tedaj

$$dg_{f(p)} = d(\sum_{k=1}^m \lambda_k y_k),$$

sledi isto pravilo za vsako funkcijo. Situacijo povzamemo v naslednjem diagramu:

$$\begin{tikzcd}
f^*(g) = g \circ f \in \mathcal{C}_p^\infty \arrow[dd, bend right] & g \in \mathcal{C}^\infty_{f(p)} \arrow[l, "f^*"'] \arrow[dd, bend left] \\
T_p\mathbb{R}^n \arrow[r, "df_p", "\text{dual zgornje}"'] & T_{f(p)}\mathbb{R}^m \\
d(g \circ f)_p \in T_p^*\mathbb{R}^n & T_p^*\mathbb{R}^m \arrow[l, "f_p^*"']
\end{tikzcd}$$

Povlek diferencialne forme.
Naj bo $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}^m_y$ gladka preslikava in $\alpha = \sum_{j=1}^{m} a_j(y)dy_j$ diferencialna forma na neki domeni v $\mathbb{R}^m$, ki vsebuje $f(\Omega)$. Povlek $f^*\alpha$ je diferencialna 1-forma na Ω, ki je po točkah definirana s pomočjo zgoraj definirane preslikave $f^*_x\colon T^*_{f(x)}\mathbb{R}^m \to T^*_x\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
(f^*\alpha)(x) := f^*_x(\alpha(f(x))) = f^*_x\left(\sum_{j=1}^{m} a_j(f(x))dy_j\right) &= \sum_{j=1}^{m} a_j(f(x))f^*_x(dy_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_j(f(x))df_j(x) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_j(f(x))\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)dx_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_j(f(x))\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)dx_k
\end{aligned}$$

III.6 Direktna (Whitneyeva) vsota vektorskih svežnjev

Imejmo vektorska svežnja:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, hook] & E \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, hook] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\
& X & & X
\end{tikzcd}$$

Njuno direktno vsoto $E \oplus E'$ definiramo s predpisom

$$\begin{tikzcd}
E \oplus E' = \bigsqcup_{x\in X} E_x \oplus E'_x \arrow[d] \\
X
\end{tikzcd}$$

Torej je vsako vlakno $(E \oplus E')_x = E_x \oplus E'_x$ enako direktni vsoti vlaken E_x in E'_x.

Izberimo pokritje $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ mnogoterosti X, na katerem je E podan z 1-kociklom $g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to GL_n(\mathbb{R})$ in je E' podan z 1-kociklom $g'_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to GL_m(\mathbb{R})$. Potem je $E \oplus E'$ podan na $\mathcal{U}$ z 1-kociklom

$$\begin{bmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g'_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

Primer 36. Trivialen sveženj: $X \times \mathbb{R}^n = (X \times \mathbb{R}) \oplus (X \times \mathbb{R}) \oplus \ldots \oplus (X \times \mathbb{R})$.

Notranja direktna vsota.
Naj bosta $E', E'' \subset E$ komplementarna vektorska podsvežnja svežnja $E \to X$:

$$\forall x \in X: \quad E'_x + E''_x = E_x \quad \text{in} \quad E'_x \cap E''_x = \{0\}$$

Potem obstaja izomorfizem vektorskih svežnjev

$$\begin{aligned} E' \oplus E'' &\xrightarrow{\cong} E \\ e'_x \oplus e''_x &\mapsto e'_x + e''_x \in E_x. \end{aligned}$$

Dobimo kratko eksaktno zaporedje:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} = 0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr] & E \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & E'' \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[l, bend right, "\psi"'] & 0 \\ & & X & & \end{tikzcd}$$

Trditev 15. $E \cong E' \oplus E''$

Dokaz. Konstruirali bomo homomorfizem vektorskih svežnjev $\psi\colon E'' \to E$, ki zadošča

$$\rho \circ \psi = \mathrm{Id}_{E''} \Rightarrow \psi \text{ je injektiven.}$$

Uporabimo particijo enote. Naj bo $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ pokritje X, tako da za vsak α obstaja karta $\varphi_\alpha\colon E_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, da velja

$$\varphi_\alpha(\tau(E')|_{U_\alpha}) = U_\alpha \times (\mathbb{R}^{n'} \times \{0\}^{n-n'}).$$

(Torej je φ_α izbrana sveženjska karta za podsveženj $\tau(E')$ svežnja E.) Naj bo $n' + n'' = n$. Definiramo

$$F_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}\Big(U_\alpha \times (\{0\}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''})\Big) \subset E|_{U_\alpha}.$$

To je podsveženj svežnja $E|_{U_\alpha}$, za katerega velja

$$\tau(E')|_{U_\alpha} \oplus F_\alpha = E|_{U_\alpha}.$$

Zožitev $\rho\colon F_\alpha \xrightarrow{\cong} E''|_{U_\alpha}$ je očitno izomorfizem. Definiramo $\psi_\alpha := (\rho|_{F_\alpha})^{-1}$.
Sedaj izberemo particijo enote χ_α podrejeno pokritju $\{U_\alpha\}$:

$$\chi_\alpha\colon X \to [0,1], \quad \operatorname{supp}\chi_\alpha \subset U_\alpha, \quad \sum_\alpha \chi_\alpha = 1$$

Definiramo preslikavo $\psi\colon E'' \to E$ s predpisom

$$\psi = \sum_\alpha \chi_\alpha \psi_\alpha, \qquad \psi(e''_x) = \sum_\alpha \chi_\alpha(x)\psi_\alpha(e''_x) \quad (e''_x \in E''_x).$$

Ker je na vsakem vlaknu linearna kombinacija linearnih preslikav, je linearna. Poleg tega je

$$\rho(\psi(e''_x)) = \sum_\alpha \chi_\alpha(x)\rho(\psi_\alpha(e''_x)) = e''_x,$$

torej je $\rho \circ \psi = \mathrm{Id}\,|_{E''}$.

Drugi dokaz: s pomočjo particije enote konstruiramo na E polje skalarnih produktov na vlaknih E_x:

$$E_x \times E_x \xrightarrow{g_x} \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto g_x(v,w)$$

V lokalni karti $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ vzamemo standardni evklidski skalarni produkt. Polje skalarnih produktov na vsem svežnju definiramo s predpisom

$$g = \sum_\alpha \chi_\alpha g_\alpha$$

kjer je $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ particija enote kot zgoraj.

Naj bo $F \subset E$ ortogonalni komplement podsvežnja $\tau(E') \subset E$. Potem je zožitev $\rho_F \colon F \to E''$ bijektivna, torej njen inverz $\psi = (\rho_F)^{-1} \colon E'' \to E$ zadošča $\rho \circ \tau = \mathrm{id}\,|_{E''}$.

Sedaj imamo v E dva vektorska podsvežnja $\tau(E') \cong E'$ in $\psi(E'') \cong E''$. Ker je $\ker\rho = \tau(E')$ in je $\rho \colon \psi(E'') \to E''$ izomorfizem, sledi, da sta ta dva podsvežnja komplementarna. Torej je

$$E \cong \tau(E') \oplus \rho(E'') \cong E' \oplus E''.$$

□

III.7 Normalni sveženj podmnogoterosti in izrek o cevastih okolicah

Naj bo $M \subset X$ gladka podmnogoterost mnogoetrosi X. Njen tangentni sveženj TM je podsveženj zožitve $TX|_M$ tangentnega svežnja X na podmnogoterost M. Kvocientni sveženj $TX|_M/_{TM} = N_{M/X}$ imenujemo *normalni sveženj* M v X. Imamo torej kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov svežnjev

$$0 \to TM \hookrightarrow TX|_M \to TX|_M/TM = N_{M/X} \to 0.$$

Po prejšnji trditvi obstaja vložitev $N_{M/X} \overset{\varphi}{\hookrightarrow} TX|_M$ in je

$$TM \oplus N_{M/X} \cong TX|_M.$$

Če izberemo na tangentnem svežnju TX polje skalarnih produktov g (Riemannovo metriko), lahko predstavimo normalni sveženj $N_{M/X}$ kot ortogonalni komplement tangentnega svežnja TM v tangentnem svežnju $TX|_M$ ambientne mnogoterosti, zoženem na M:

$$TX|_M = TM \oplus_{\perp g} N_{M/X}$$

Izrek 20. (O obstoju cevaste okolice) *Če je M gladka podmnogoterost v gladki mnogoterosti X, potem ima M neko odprto okolico $\Omega \subset X$, ki je difeomorfna neki odprti okolici $U \subset N_{M/X}$ ničelnega prereza v normalnem svežnju M v X.*

Izrek je zelo pomemben v uporabah, saj nam omogoča redukcijo problemov v neki okolici M v X na ustrezne probleme v normalnem svežnju $N = N_{M/X}$, kjer pa imamo linearno strukturo in se problemi pogosto poenostavijo.

V nadaljevanju označimo $N = N_{M/X}$. Okolico U v izreku lahko izberemo tako, da so njena vlakna U_x ($x \in M$) konveksne množice v vlaknih N_x, npr. krogle polmera $r(x) > 0$ v neki metriki na N. S pomočjo nelinearne dilacije v vlaknih (npr. z uporabo funkcije tangens) lahko totalni prostor N preslikamo difeomorfno na U.

Če ima U konveksna vlakna, je družina preslikav

$$\tau_t\colon U \to U \ (t \in [0,1]), \quad \tau_t(x,e) = (x, te) \ \forall e \in U_x$$

homotopija množice U na ničelni prerez. Velja

$$\tau_1 = \mathrm{id}_U, \quad \tau_0 = (x,0) = 0_x, \quad \tau_t(x,0) = (x,0),$$

torej homotopija miruje na ničelnem prerezu. Taki homotopiji pravimo *deformacijska retrakcija* U na ničelni prerez.

Posledica 8. *Če je $M \subset X$ vložena podmnogoterost, potem ima M bazo okolic $\Omega \subset X$, tako da je M deformacijska retrakcija vsake od teh okolic.*

Dokaz (izreka 20)**.** Prvi primer: $X = \mathbb{R}^n$, $\dim M = m$, $d = n - m = \operatorname{rang} N$, kjer je $N = N_{M/\mathbb{R}^n}$. $M \times \mathbb{R}^n = T\mathbb{R}^n|_M = TM \oplus N$, $N \subset M \times \mathbb{R}^n$. Za vsako točko $x \in M$ označimo z $0_x \in N_x$ ničelni element vektorskega prostora N_x (to je vlakno normalnega svežnja nad točko x). Preslikava $M \ni x \to 0_x \in N$ je difeomorfizem mnogoterosti M na ničelni prerez $M_0 = \{0_x\colon x \in M\} \subset N$ normalnega svežnja. (Običajno mnogoterost M kar identificiramo z ničelnim prerezom M_0 v normalnem svežnju N.) Vlakno N_x je vektorski podprostor v $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, torej lahko vsak element $e_x \in N_x$ razumemo kot vektor v $\mathbb{R}^n$. Definiramo preslikavo

$$\Phi\colon N \to \mathbb{R}^n, \qquad \Phi(e_x) = x + e_x \quad \forall e_x \in N_x.$$

Očitno je $\Phi(0_x) = x$ za vsak $0_x \in M_0$; torej je $\Phi\colon M_0 \to M$ difeomorfizem, ki je inverz od $x \to 0_x$. (Pri identifikaciji $M \cong M_0$ je $\Phi|_M = \mathrm{Id}_M$.)

Diferencial preslikave Φ v točki $0_x \in N_x$ je linearna preslikava

$$(d\Phi)_{0_x} \colon T_{0_x}N \to T_x\mathbb{R}^n.$$

Tangentni prostor $T_{0_x}N$ je direktna vsota tangentnega prostora $T_{0_x}M_0$ ničelnega prereza M_0 (t.i. "horizontalna komponenta") in tangentnega prostora $T_{0_x}N_x$ na vlakno N_x (t.i. "vertikalna komponenta"). Ker je N_x vektorski prostor, lahko tangentni prostor $T_{0_x}N_x$ identificiramo z N_x. Torej imamo

$$T_{0_x}N = T_{0_x}M_0 \oplus T_{0_x}N_x \cong T_xM \oplus N_x.$$

Ker je $\Phi|_M = \mathrm{Id}_M$, je

$$d\Phi_{0_x} \colon T_xM \xrightarrow{\mathrm{id}} T_xM \subset T_x\mathbb{R}^n.$$

Oglejmo si še vertikalno komponento. Iz predpisa $\Phi(e_x) = x + e_x$ sledi, da je za fiksen x preslikava $N_x \ni e_x \mapsto \Phi(e_x)$ linearni izomorfizem N_x na afin podprostor $x + N_x \subset \mathbb{R}^n$, ki ga identificiramo z vektorskim podprostorom $N_x \subset T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. Diferencial linearne preslikave je kar enak tej preslikavi, torej je

$$d\Phi_{0_x} \colon N_x \to N_x \subset T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

linearni izomorfizem.

Povzetek: diferencial $d\Phi_{0_x} \colon T_{0_x}N \xrightarrow{\cong} T_x\mathbb{R}^n$ preslika horizontalno komponento $T_{0_x}M_0$ izomorfno na tangentni prostor $T_xM \subset \mathbb{T}_x\mathbb{R}^n$ in preslika vertikalno komponento $T_{0_x}N_x \cong N_x$ izomorfno na normalni prostor $N_x \subset T_x\mathbb{R}^n$. Ker sta slednja dva prostora komplementarna, sledi, da je $d\Phi_{0_x}$ linearni izomorfizem.

Iz izreka o inverzni preslikavi sledi, da je Φ lokalni difeomorfizem v neki okolici $\Omega_0 \subset N$ ničelnega prereza M_0.

Sedaj je potrebno najti manjšo odprto okolico Ω, $M_0 \subset \Omega \subset \Omega_0$, tako da je $\Phi \colon \Omega \to\subset \mathbb{R}^n$ injektivna in zato difeomorfizem na svojo sliko $\Phi(\Omega) = \Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$. Obstoj take okolice sledi iz naslednje leme, ki jo uporabimo za primer $X = \mathbb{R}^n$, $X_0 = M$, $Y = N$, $Y_0 = M_0$.

Lema 6. *Naj bo $\Phi \colon Y \to X$ gladka preslikava in $Y_0 \subset Y$ ter $X_0 \subset X$ podmnogoterosti, tako da veljata naslednji lastnosti:*

1. *$\Phi \colon Y_0 \to X_0$ je difeomorfizem, in*

2. *za vsako točko $y \in Y_0$ je diferencial $d\Phi_y \colon T_yY \to T_{\Phi(y)}X$ linearni izomorfizem.*

Tedaj obstaja odprta okolica $\Omega \subset Y$ podmnogoterosti Y_0, tako da je $\Phi \colon \Omega \to \Phi(\Omega) \subset X$ difeomorfizem.

Dokaz. Dokaz za primer, ko je Y_0 kompaktna:
Recimo, da Φ ni injektivna v nobeni okolici podmnogoterosti Y_0. Tedaj obstaja zaporedji $a_j, b_j \in Y$, ki konvergirata proti Y_0, tako da za vsak indeks j velja $a_j \neq b_j$ in $\Phi(a_j) = \Phi(b_j)$. S prehodom na podzaporedje dobimo konvergentni zaporedji $a_j \to a_0 \in Y_0$, $b_j \to b_0 \in Y_0$. Odtod sledi po zveznosti

$$\Phi(a_0) = \lim \Phi(a_j) = \lim \Phi(b_j) = \Phi(b_0).$$

Ker je Φ injektivna na Y_0, sledi $a_0 = b_0$. To je protislovje, saj je Φ difeomorfizem na neki okolici $U \subset Y$ točke a_0, za vse dovolj velike j pa velja $a_j, b_j \in U$, $a_j \neq b_j$ in $\Phi(a_j) = \Phi(b_j)$.

Dokaz za splošen primer, ko Y_0 ni kompaktna, je podoben, le da je tehnično nekoliko zahtevnejši. □

S tem je izrek 20 dokazan v primeru $X = \mathbb{R}^n$.

V splošnem primeru, ko na X nimamo linearne strukture, ne moremo definirati preslikave Φ kot zgoraj. V tem primeru izrek dokažemo na enega od dveh možnih načinov:

1. z vložitvijo $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ reduciramo na prejšnji primer;
2. metoda sprejev, ki deluje splošno na vseh mnogoterostih.

Dokaz s pomočjo prve metode prepustimo bralcu.

Oglejmo si sedaj dokaz z drugo metodo, kjer bomo uporabili tokove vektorskih polj. Izberemo gladka vektorska polja $V_1, \ldots, V_m$ na X, ki generirajo tangentni prostor T_xX v poljubni točki $x \in X$. Naj bo ϕ_t^j tok polja V_j. Preslikava

$$F(x, t_1, \ldots, t_m) = \phi_{t_1}^1 \circ \cdots \circ \phi_{t_m}^m(x), \qquad x \in X,\ t_j \in \mathbb{R} \tag{III.7.1}$$

je definirana in gladka na neki odprti okolici U množice $X \times \{0\}^m$ v trivialnem svežnju $X \times \mathbb{R}^m$ ter zadošča naslednjim lastnostim:

$$F(x,0) = x, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t_j}\right|_{t_0} F(x,t) = V_j(x), \qquad x \in X,\ j = 1, \ldots, m.$$

Ker vektorji $V_1(x), \ldots, V_m(x)$ napenjajo tangentni prostor T_xX v vsaki točki, je F submerzija vzdolž $X \times \{0\}^m$. Torej je za vsak $x \in X$ preslikava

$$\Theta_x = \left.\frac{\partial}{\partial t_j}\right|_{t_0} F(x,t) \colon \mathbb{R}^m \to T_xX \tag{III.7.2}$$

linearna in surjektivna. Preslikava $\Theta \colon X \times \mathbb{R}^m \to TX$, ki je na vlaknu $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ enaka Θ_x, je torej epimorfizem vektorskih svežnjev.

Naj bo $E' \subset M \times \mathbb{R}^m$ podmnožica z vlakni

$$E'_x = \Theta_x^{-1}(T_x M), \quad x \in M.$$

Preprosto je videti, da je E' gladek vektorski podsveženj trivialnega svežnja $M \times \mathbb{R}^m$.

Naj bo $E \subset M \times \mathbb{R}^m$ nek komplementarni podsveženj, tako da je $M \times \mathbb{R}^m = E \oplus E'$. Homomorfizem $\Theta \colon M \times \mathbb{R}^m \to TX|_M$ tedaj inducira izomorfizem $\Theta \colon E \xrightarrow{\cong} \nu$ svežnja E na normalni sveženj $\nu = N_{M/X}$.

Oglejmo si sedaj preslikavo $\Phi := F|_{E \cap U} \colon E \cap U \to X$. Označimo z $0_x \in E_x$ ničelni element vlakna E_x. Očitno velja $\Phi(0_x) = F(x)$ za vsak $x \in M$, torej Φ preslika ničelni prerez $E_0 \subset E$ difeomorfno na podmnogoterost $M \subset X$. Trdimo, da je za vsako točko $x \in M$ diferencial

$$d\Phi_{0_x} \colon T_{0_x} E \to T_x X$$

linearni izomorfizem. Najprej opazimo, da je

$$T_{0_x} E = T_{0_x} E_0 \oplus E_x$$

direktna vsota horizontalnega podprostora $T_{0_x} E_0$ (tangentni prostor na ničelni prerez E_0) in vertikalnega podprostora (tangentni prostor na vlakno E_x; ker je E_x vektorski prostor, lahko $T_{0_x} E_x$ identificiramo z E_x). Ker je $\Phi \colon E_0 \to M$ diffeomorfizem, je

$$d\Phi_{0_x} \colon T_{0_x} E_x \to T_x M$$

izomorfizem. V normalnih smereh E_x pa po konstrukciji velja $d\Phi_{0_x} = \Theta_x$, torej dobimo izomorfizem $E_x \to \nu_x$. S tem je trditev dokazana.

Zaključek dokaza sledi tako kor prej iz leme 6. $\square$

Poglavje IV

LIEJEVE GRUPE IN LIEJEVE ALGEBRE

IV.1 Definicija Liejeve grupe in primeri

Definicija 32. *Realna Liejeva grupa* G je gladka mnogoterost, ki je hkrati grupa, tako da so algebraične operacije (produkt $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ in inverz $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$) gladke preslikave.

Kompleksna Liejeva grupa je kompleksna mnogoterost G, ki je hkrati grupa, tako da so grupne operacije holomorfne.

Primer 37.

1. $(\mathbb{R}^n, +)$ je Liejeva grupa
   $(\mathbb{C}^n, +)$ je kompleksna Liejeva grupa

2. $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon \det A \neq 0\}^{odprta} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ je realna Liejeva grupa.
   $(A, B) \mapsto A \cdot B$ operacije so polinomske
   $A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$ racionalna
   $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \colon \det A \neq 0\}^{odprta} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ je kompleksna Liejeva grupa.

Definicija 33. Naj bo G Liejeva grupa. Liejeva podgrupa $H \subset G$ je podgrupa, ki je hkrati podmnogoterost.

Primer 38.

1. $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \colon \det A = 1\}$
   Očitno je podgrupa, zaprta. Preveri, da je število $1 \in \mathbb{R}$ regularna vrednost preslikave $A \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto \det A \in \mathbb{R}$ (to je, rang je enak 1 v vsaki točki, kjer $\det A = 1$). Torej je $SL_n(\mathbb{R})$ hiperploskev v $GL_n(\mathbb{R})$ (glej vaje).
   $SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \colon \det A = 1\}$ je kompleksna Liejeva podgrupa grupe $GL_n(\mathbb{C})$.

2. $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R})\colon A^T A = I\}$ (ortogonalna grupa) je realno analitična Liejeva podgrupa v $GL_n(\mathbb{R})$.
   $U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C})\colon \overline{A}^T A = I\}$ (unitarna grupa) je realna Liejeva podgrupa v $GL_n(\mathbb{C})$, ni pa kompleksna Liejeva podgrupa, saj ni kompleksna podmnogoterost.

3. Če je $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \ldots + \mathbb{Z}e_k$ diskretna aditivna pogrupa v $\mathbb{R}^n$, je kvocient $\mathbb{R}^n/_\Gamma$ je Liejeva grupa z operacijo $+$, podedovano iz $\mathbb{R}^n$. Če je Γ maksimalnega ranga n, je $\mathbb{R}^n/_\Gamma$ torus.

4. Podobno kot v prejšnji točki je za vsako diskretno aditivno podgrupo $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ kvocient $\mathbb{C}^n/_\Gamma$ kompleksna Liejeva grupa.

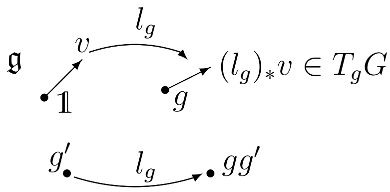
Naj bo $\mathbb{1} \in G$ enota Liejeve grupe G. Vsakemu elementu $g \in G$ priredimo levo moženje

$$l_g\colon G \to G, \quad l_g(g') = gg' \quad (\forall g' \in G)$$

in desno množenje

$$r_g\colon G \to G, \quad r_g(g') = g'g \quad (\forall g' \in G).$$

Obe preslikavi l_g, r_g sta difeomorfizma z inverzom $(l_g)^{-1} = l_{g^{-1}}$, $(r_g)^{-1} = r_{g^{-1}}$.



IV.2 Liejeva algebra in invariantna vektorska polja

Definicija 34. Naj bo G Liejeva grupa z enoto $\mathbb{1}$. Njena *Liejeva algebra* je

$$\mathfrak{g} \overset{def}{=} T_{\mathbb{1}}G = \text{ tangentni prostor na } G \text{ v enoti } \mathbb{1} \in G.$$

Vsakemu elementu $v \in \mathfrak{g}$ priredimo vektorsko polje $V = \tilde{v}$ na G s predpisom:

$$V_g = d(l_g)|_{\mathbb{1}} \cdot v = (l_g)_* v \in T_gG, \quad g \in G.$$

Očitno je V gladko vektorsko polje na G, saj so grupne operacije gladke.

Trditev 16. *Tako definirano vektorsko polje V na G je levo invariantno.*

Dokaz. Naj bo $g, h \in G$. Potem velja

$$(l_h)_* V_g = (l_h)_* \circ (l_g)_* v = (l_h \circ l_g)_* v = (l_{hg})_* v = V_{hg} = V_{l_h(g)}.$$

To pomeni, da je V levo invariantno. $\square$

Podobno definiramo polje $v \rightsquigarrow \widetilde{V}_g = d(r_g)\,v \in T_gG$. Preveri, da je tako definirano vektorsko polje desno invariantno, to je, $(r_h)_*\widetilde{V} = \tilde{V},\ \forall h \in G$.

Opomba. V splošnem $V \neq \widetilde{V}$, razen če je G abelova grupa.

Primer 39. 1. $G = (\mathbb{R}^n, +)$ (enota je $\mathbb{1} = 0$)
Liejeva algebra $\mathfrak{g} = T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$
$v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$
$\tilde{v} = V = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ (vektor $v = V_0$ translatiramo po $\mathbb{R}^n$)

2. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{1} = 1$
$v \in T_1\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, l_x je množenje z x
$V_x = vx\frac{\partial}{\partial x}$
Bazno levo invariantno vektorsko polje: $x\frac{\partial}{\partial x}$

Oglejmo si vložitev

$$T_{\mathbb{1}}G = \mathfrak{g} \overset{\Phi}{\hookrightarrow} \aleph(G)$$

v Liejevo algebro vseh gladkih vektorskih polj na G. Spomnimo se, da je $\aleph(G)$ Liejeva algebra za operacijo komutator (ali Liejev odvod) vektorskih polj:

$$(V, W) \mapsto [V, W] = L_V W$$

Trditev 17. *Če sta V, W levo invariantni vektorski polji na G, potem so tudi polja $V + W$, cV ($c \in \mathbb{R}$), $[V, W]$ levo invariantna.*

To pomeni, da je slika vložitve $\Phi\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \aleph(G)$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre vseh vektorskih polj. *Torej obstaja natanko ena struktura Liejeve algebre na $\mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G$, za katero je vložitev $\Phi\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \aleph(G)$ Liejev izomorfizem $\mathfrak{g}$ na podalgebro levo invariantnih polj na G.*

Dokaz. Naj bo l poljubno levo množenje na G. Potem je

$$l_*(V + W) = l_*V + l_*W = V + W$$

ker sta V in W levo invariantni. Podobno

$$l_*(cV) = cl_*V = cV, \quad l_*([V, W]) = [l_*V, l_*W] = [V, W].$$

□

Trditev 18. *Tangentni sveženj vsake Liejeve grupe G je trivialen: $TG \cong G \times \mathbb{R}^n$, $n = \dim G$.*

Dokaz. Izberimo bazo $v_1, \ldots, v_n$ Liejeve algebre $T_{\mathbb{1}}G = \mathfrak{g}$. Naj bodo $V_1, \ldots, V_n$ pripadajoča levo invariantno polja. Ker je $V_j(g(= d(l_g)v_j$ in je levo množenje l_g difeomorfizem grupe G, so vektorji $V_1(g), \ldots, V_n(g)$ baza T_gG za vsak $g \in G$. Preslikava

$$G \times \mathbb{R}^n \ni (g, (c_1, \ldots, c_n)) \overset{\Phi}{\mapsto} \sum_{j=1}^{n} c_j V_j(g) \in T_gG$$

je izomorfizem vektorskih svežnjev. □

Trditev 19. *Vsako levo invariantno (ali desno invariantno) vektorsko polje na Liejevi grupi je kompletno, to je, njegov tok φ_t obstaja za $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Naj bo $\gamma(t)$ tokovnica polja V, $\gamma(0) = \mathbb{1}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
Izberimo element $g \in G$. Oglejmo si pot $\lambda(t) = l_g(\gamma(t)) = g\gamma(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
$\lambda(0) = g\gamma(0) = g$
$\dot\lambda(t)|_{t=0} = (dl_g)_{\mathbb{1}} \cdot \dot\gamma(0) = (dl_g)_{\mathbb{1}} \cdot v = V_g$ po definiciji levo invariantnega polja
$\dot\lambda(t) = (l_g)_* \cdot \dot\gamma(t) = (l_g)_* V_{\gamma(t)} = V_{g\gamma(t)} = V_{\lambda(t)}$.
Torej je $\lambda(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tokovnica polja V, ki je v času $t = 0$ v točki g.
To pomeni, da fundamentalna domena toka polja V vsebuje množico $G \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset G \times \mathbb{R}$.
Od tod sledi, da je V kompletno (fundamentalna domena je $G \times \mathbb{R}$). □

Trditev 20. *Tokovnica levo invariantnega vektorskega polja V skozi enoto $\mathbb{1} \in G$ je enoparametrična podgrupa grupe G.*

Dokaz. Fiksirajmo $s \in \mathbb{R}$. Oglejmo si poti

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t+s)$$
$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(s)\gamma(t)$$

Obe poti sta tokovnici polja V, ki gresta pri $t = 0$ skozi isto točko $\gamma(s)$. Zaradi enoličnosti tokovnic sledi, da sovpadata, torej je $\gamma(t+s) = \gamma(s)\gamma(t) = \gamma(t)\gamma(s)$ za vsak $s, t \in \mathbb{R}$. □

Primer 40. 1. $G = (\mathbb{R}^n, +)$
$\mathfrak{g} = T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$
$[\cdot,\cdot] = 0$ ker je G abelova
Levo invariantna polja so konstantna polja
$v, w \in \mathfrak{g}$, $[v, w] = [V, W]_0$ (ker imata V,W konstantne koeficiente), $V_0 = v$, $W_0 = w$.

2. $GL_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}_n = T_IGL_n(\mathbb{R}) = T_I\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ (vse $n \times n$ matrike), $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

$A \in \mathfrak{gl}_n$, $A = (a_{ij})$
V^A pripadajoče levo invariantno vektorsko polje na $GL_n(\mathbb{R})$
$X \in GL_n(\mathbb{R})$

$\gamma(t) = I + tA \in GL_n(\mathbb{R})$ za majhne $|t|$, $\gamma(0) = I$, $\dot{\gamma}(0) = A$ tangentni vektor poti γ.

$$
\begin{aligned}
(V^A)_X &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} l_X \cdot \gamma(t) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} X(I + tA) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (X + tXA) \\
&= XA \in T_X GL_n(R) \cong \mathbb{R}^{n\times n}.
\end{aligned}
$$

Označimo koordinate na $\mathbb{R}^{n\times n}$ z $X = x_{ij}$:

$$(V^A)_X = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} a_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

Vsota $\sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik} a_{kj}$ je (i,j) element matrike XA, ki predstavlja vektorsko polje V^A v točki X. Če je $B \in \mathfrak{gl}_n$, je

$$(V^B)_X = \sum_{l,m=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{p=1}^{n} x_{lp} b_{pm} \right)}_{(l,m) \text{ el. v } XB} \frac{\partial}{\partial x_{lm}}.$$

Odtod sledi

$$
\begin{aligned}
\left[V^A, V^B\right] &= \sum_{i,j,k,l,m,p} \left(x_{ik} a_{kj} \frac{\partial (x_{lp} b_{pm})}{\partial x_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{lm}} - x_{lp} b_{pm} \frac{\partial (x_{ik} a_{kj})}{\partial x_{lm}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right) = \\
&= \sum_{i,j,k,m} x_{ik} a_{kj} b_{jm} \frac{\partial}{\partial x_{im}} - \sum_{i,j,k,p} x_{ip} b_{pk} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}
\end{aligned}
$$

Sedaj pogledamo vrednosti pri $X = I$: $x_{ip} = \delta_{ip}$, $x_{ik} = \delta_{ik}$. Torej je

$$\left[V^A, V^B\right]_I = \underbrace{\sum_{i,j,m} a_{ij} b_{jm}}_{(AB)_{im}} \frac{\partial}{\partial x_{im}} - \underbrace{\sum_{i,j,k} b_{ik} a_{kj}}_{(BA)_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \rightsquigarrow AB - BA.$$

Torej je $[V^A, V^B]$ levo invariantno vektorsko polje na $GL_n(\mathbb{R})$, ki pripada matriki $[A, B] = AB - BA \in \mathfrak{gl}_n$.
$\mathfrak{gl}_n = (\mathbb{R}^{n\times n}, [\cdot,\cdot])$ matrični komutator
Tok polja $V^A_X = XA$:

Tokovnica $\gamma(t)$ zadošča enačbi $\dot\gamma(t) = V^A_{\gamma(t)} = \gamma(t)A$

$$\Longrightarrow \gamma(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n, \qquad \gamma(0) = I$$

$\varphi_t(X) = Xe^{tA}$ je tok skozi točko $X \in GL_n(\mathbb{R})$.

IV.3 Eksponentna preslikava na Liejevi grupi

$$\exp\colon \mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G \to G$$

Modelni primer: $G = GL_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ ($n \times n$ matrike);

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Eksponentno prelikavo na poljubni Liejevi grupi definiramo na naslednji način. Vektorju $v \in \mathfrak{g}$ priredimo levo invariantno polje V s predpisom

$$V(g) = (dl_g)_{\mathbb{1}} v \in T_g G.$$

Ker je polje V kompletno, obstaja tokovnica $\varphi_t(\mathbb{1}) = e^{tv} \cdot \mathbb{1}$ za vsak $t \in \mathbb{R}$. Sedaj definiramo

$$\exp v = \varphi_1(\mathbb{1}).$$

V primeru, ko je $G = GL_n(\mathbb{R})$, $v = A \in \mathfrak{g}l_n$, $\varphi^A_t(I) = e^{tA}$, dobimo

$$\exp(A) = \varphi^A_1(I) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Preslikava $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ je gladka, $\exp(0) = \mathbb{1}$.

Trditev 21. *Diferencial eksponentne preslikave* $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ *v identiteti* $\mathbb{1} \in G$ *je identična preslikava na Liejevi algebri* $\mathfrak{g}$*:*

$$d\exp|_0\colon T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \longrightarrow T_{\mathbb{1}}G = \mathfrak{g}, \quad d\exp|_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}.$$

Dokaz. Naj bo $v \in \mathfrak{g}$ in V prirejeno levo invariantno polje na G. Označimo z $\lambda_v(t) = \varphi^v_t(\mathbb{1})$ tok polja V. Po definiciji je torej $\exp(v) = \lambda_v(1)$ za vsak $v \in \mathfrak{g}$.
Naj bo $s \in \mathbb{R}$. Ker je sV levo invariatno polje, prirejeno vektorju $sv = sV|_{\mathbb{1}} \in \mathfrak{g}$, je preslikava $t \mapsto \lambda_{sv}(t)$ tokovnica polja sV, ki gre pri $t = 0$ skozi $\mathbb{1} \in G$. Trdimo:

$$\lambda_{sv}(t) = \lambda_v(st).$$

Dokaz:

$$\frac{d}{dt}\lambda_v(st) = \underbrace{\frac{d}{du}\lambda_v(u)}_{V(\lambda_v(st))}\underbrace{\frac{du}{dt}}_{s} = s \cdot V(\lambda_v(st)).$$

To pomeni, da je tudi $t \mapsto \lambda_v(st)$ tokovnica polja sV, ki gre pri $t = 0$ skozi $\mathbb{1} \in G$. Iz enoličnosti tokovnic sledi $\lambda_{sv}(1) = \lambda_v(s)$. Torej velja

$$\exp(sv) = \lambda_v(s), \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Z odvajanjem po s pri $s = 0$ dobimo

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp(sv) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \lambda_v(s) = v.$$

Ker je $s \mapsto sv \in \mathfrak{g}$ pot s tangentnim vektorjem v, je po geometrijski definiciji diferenciala leva stran zgornje enačbe enaka $d\exp|_0 \cdot v$. Torej zgornja enačba pove

$$d\exp|_0 \cdot v = v, \quad \forall v \in \mathfrak{g}.$$

$\square$

Izrek o inverzni preslikavi pove, da exp preslika neko okolico $0 \in \mathfrak{g}$ difeomorfno na neko okolico $\mathbb{1} \in G$. V splošnem ta preslikava ni surjektivna in lahko ima kritična točke daleč od izhodišča 0.

Sprej na Liejevi grupi. S translacijo eksponentne preslikave z grupnim produktom dobimo na G preslikavo, ki se imenuje *sprej*. Konstrukcija je naslednja.
Naj bo $\dim G = n$. Produkt $G \times \mathfrak{g} \cong G \times \mathbb{R}^n$ je trivialen vektorski svežen nad G. Definiramo preslikavo $s\colon G \times \mathfrak{g} \to G$ s predpisom

$$s(g, v) = ge^v = l_g(e^v), \quad s(g, 0) = g.$$

Njen diferencial v točki $(g, 0)$ iz ničelnega prereza je linearna preslikava

$$ds_{(g,0)}\colon T_{(g,0)}(G \times \mathfrak{g}) \to T_gG.$$

Tangentni prostor $T_{(g,0)}(G \times \mathfrak{g})$ je direktna vsota $T_gG \oplus T_0\mathfrak{g}$, kjer je drugi sumand tangenta na vlakno (t.i. vertikalni tangentni prostor v točki $(g, 0)$). Zožitev diferenciala na drugo komponento $\mathfrak{g}$ je enak diferencialu preslikave $\mathfrak{g} \ni v \mapsto l_g(e^v)$ pri $v = 0$. Po verižnem pravilu je ta enak

$$d(l_g)_{\mathbb{1}} \circ d_0 e^v = d(l_g)_{\mathbb{1}}\colon \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} T_gG,$$

torej je izomorfizem.

$$\begin{tikzcd} G \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi"', shift right] \arrow[d, bend left, "s \text{ (sprej)}"] \\ G \end{tikzcd}$$

IV.4 Liejeve podgrupe in podalgebre

Naj bosta G in G' Liejevi grupi in $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ njuni Liejevi algebri.

Definicija 35. Gladka preslikava $F\colon G \to G'$, ki je hkrati homomorfizem grup, se imenuje *homomorfizem Liejevih grup.*

Naslednjo trditev smo dokazali na vajah.

Trditev 22. *Naj bo $F\colon G \to G'$ homomorfizem Liejevih grup.*

1. *Za vsako levo invariantno vektorsko polje V na G obstaja natanko eno levo invariantno polje $\widetilde{V}$ na G', tako da velja $dF_g V_g = \widetilde{V}_{F(g)}$ za vsak $g \in G$.*
2. *Diferencial $dF_{\mathbb{1}}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ v identiteti $\mathbb{1} = \mathbb{1}_G \in G$ je homomorfizem Liejevih algeber.*
3. *Jedro $\ker dF_{\mathbb{1}}$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*
4. *Slika $dF_{\mathbb{1}}(\mathfrak{g})$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}'$.*
5. *Rang preslikave F je konstanten (neodvisen od točke $g \in G$).*
6. *Jedro $H = \ker F = \{g \in G\colon F(g) = \mathbb{1}_{G'}\}$ je Liejeva podgrupa grupe G.*

Posledica 9. *Če je H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G, je njena Liejeva algebra $\mathfrak{h} = T_{\mathbb{1}}H$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G$.*

Dokaz. Uporabimo prejšnjo trditev za inkluzijo $F\colon H \hookrightarrow G$. □

Sedaj bomo dokazali naslednji izrek.

Izrek 21. *Naj bo G Liejeva grupa z Liejevo algebro $\mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G$. Za vsako Liejevo podalgebro $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ obstaja natanko ena povezana Liejeva podgrupa $H \subset G$ z Liejevo algebro $\mathfrak{h} = T_{\mathbb{1}}H$.*

Dokaz. Izberemo bazo $v_1, \ldots, v_d \in \mathfrak{h} = \mathbb{R}^d$.
Naj bodo $V_1, \ldots, V_d$ prirejena levo invariantna polja. Ta napenjajo podvseženj $E \subset TG$ ranga d. Njegovo vlakno E_g je enako

$$E_g = \mathrm{Lin}\{V_1(g), \ldots, V_d(g)\}$$

$\dim E_g = d$ neodvisna od izbire $g \in G$.
Trdimo, da je E involutiven. V ta namen moramo dokazati, da je komutator $[V_j, V_k]$ tangenten na E za vsak $j, k = 1, \ldots, d$. To polje je levo invariantno, ki pripada komutatorju $[v_j, v_k] \in \mathfrak{g}$. Ker je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra, je $[v_j, v_k] \in \mathfrak{h}$, torej je

$$[v_j, v_k] = \sum_{i=1}^{d} c_{ijk} v_i, \quad c_{ijk} \in \mathbb{R}.$$

Ker vemo, da se operacije na vektorjih iz $\mathfrak{g}$ ujemajo z operacijami na prirejenih levo invariantnih vektorskih poljih, odtod sledi

$$[V_j, V_k] = \sum_{i=1}^{d} c_{ijk} V_i.$$

Polje na desno pa je seveda tangentno na E.
Po Frobeniusovemu izreku obstaja natanko ena maksimalna integralna podmnogoterost $H \subset G$ skozi točko $\mathbb{1}$. H je imerzirana podmnogoterost v G, ki je dobljena kot orbita tokov polj vektorskih polj $V_1, \ldots, V_d$ skozi $\mathbb{1}$.
Ni težko dokazati, da je H tudi podgrupa grupe G (glej vaje). □

H ni nujno enostavno povezana. Lokalno jo dobimo z eksponenciranjem vektorjev iz $\mathfrak{h}$.

Brez dokaza bomo navedli naslednji izrek.

Izrek 22 (Ado)**.** *Vsaka končno dimenzionalna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je izomorfna neki Liejevi podalgebri $\mathfrak{gl}_n$ za nek $n \in \mathbb{N}$.*

Posledica 10. *Za vsako Liejevo algebro $\mathfrak{g}$ obstaja povezana Liejeva grupa G, ki ima $\mathfrak{g}$ za svojo Liejevo algebro: $T_{\mathbb{1}} G = \mathfrak{g}$.*

Če je $\widehat{G} \xrightarrow{\pi} G$ univerzalni krov ($\widehat{G}$ enostavno povezana Liejeva grupa), potem je π lokalni difeomorfizem:

$$T_{\mathbb{1}} \widehat{G} = T_{\mathbb{1}} G = \mathfrak{g}$$

Opomba. V splošnem univerzalni krov neke matrične Liejeve grupe (podgrupa v $GL_n(\mathbb{R})$) ni matrična grupa.

Primer 41. $SO(2n)$, $n \geq 2$: npr. $SO(4)$ ima fundamentalno grupo $\pi_1(SO(4)) = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow Spin(4) \xrightarrow[\text{krov}]{\text{dvolistni univerzalni}} SO(4) \to 1$$

Primer 42.

$$1 \to S^3 = SU(2) \hookrightarrow U(2) \xrightarrow{det} S^1 = U(1) \to 1$$

$$\pi_1(U(2)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

IV.5 Adjungirana reprezentacija Liejeve grupe

Vsako Liejevo grupo G lahko vložimo v $\operatorname{Diff} G$:

$$\begin{array}{ccc} G & \hookrightarrow & \operatorname{Diff} G \\ g & \mapsto & l_g \end{array}$$

Levo množenje l_g ni avtomorfizem Liejeve grupe, ker identiteto slika v g.
Avtomorfizem G je difeomorfizem $G \to G$, ki je tudi grupni homomorfizem.

$$\operatorname{Aut} G = \text{ vsi avtomorfizmi } G$$

Primer 43. Vsakemu elementu $g \in G$ priredimo *notranji avtomorfizem* $\sigma(g) \in \operatorname{Aut} G$ s predpisom

$$\sigma(g)h = ghg^{-1} \quad \forall h \in G \ \ \text{(konjugiranje z } g).$$

Preverimo, da je to res avtomorfizem:

$$\sigma(g)(h_1 h_2) = g h_1 h_2 g^{-1} = g h_1 g^{-1} g h_2 g^{-1} = \sigma(g)h_1 \cdot \sigma(g)h_2$$

□

Naj bo G povezana Liejeva grupa in $\alpha \in \operatorname{Aut} G$. Njegov diferencial α_* preslika vsako levo invariantno polje na G v levo invariantno polje; torej α_* inducira Liejev izomorfizem Liejeve algebre levo invariantnih vektorskih polj na G samo nase. Njegova vrednost v identiteti $\mathbb{1} \in G$ je torej Liejev izomorfizem

$$d\alpha_{\mathbb{1}} \colon T_{\mathbb{1}} G = \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}.$$

Naj bo $v \in \mathfrak{g}$ in V prirejeno levo invariantno polje: $V_{\mathbb{1}} = v$. Označimo $w = d\alpha_{\mathbb{1}}(v) \in \mathfrak{g}$ in W levo invariantno polje z $W_{\mathbb{1}} = w$. Potem je $\alpha_* V = W$.
Označimo s ϕ_t tok polja V in s ψ_t tok polja W. Iz $\alpha_* V = W$ sledi

$$\alpha \circ \phi_t = \psi_t \circ \alpha \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Uporabimo to identiteto pri $t = 1$ in na začetnem elementu $\mathbb{1} \in \mathfrak{g}$:

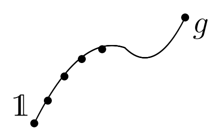
$$\alpha \circ \phi_1(\mathbb{1}) = \psi_1 \circ \alpha(\mathbb{1}) = \psi_1(\mathbb{1}).$$

Po definiciji eksponentne preslikave je $e^v = \phi_1(\mathbb{1})$ in $e^w = \psi_1(\mathbb{1})$. Zgornja enačba torej pove:

$$\alpha(e^v) = e^w = e^{d\alpha_{\mathbb{1}} \cdot v}.$$

Posledica 11. *Če je G povezana Liejeva grupa in je $\alpha \in \operatorname{Aut} G$ avtomorfizem z $d\alpha_{\mathbb{1}} = \mathrm{Id}$, potem je $\alpha = \mathrm{Id}_G$.*

Dokaz. Če je $d\alpha_{\mathbb{1}} = \mathrm{Id}$, sledi $\alpha(e^v) = e^v$, $\forall v \in \mathfrak{g}$. Vemo, da je množica $U = \{e^v \in G \colon v \in \mathfrak{g}\}$ okolica $\mathbb{1} \in G$. Ker je na tej okolici $\alpha = \mathrm{Id}$ in je G povezana, sledi $\alpha = \mathrm{Id}_G$. Razlog je v tem, da lahko vsak element $g \in G$ zapišemo kot končen produkt $g = g_1 g_2 \ldots g_N$ elementov $g_j \in U$.



$$\begin{aligned} g &= g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_N, \qquad \forall g_j = e^{v_j} \\ \alpha(g) &= \alpha(e^{v_1})\alpha(e^{v_2}) \ldots \alpha(e^{v_N}) = g \end{aligned}$$

□

Dobili smo torej reprezentacijo grupe avtomorfizmov $\operatorname{Aut} G$ kot grupo linearnih avtomorfizmov Liejeve algebre $\mathfrak{g}$:

$$\operatorname{Aut} G \ni \alpha \mapsto d\alpha_{\mathbb{1}} \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g} = \text{ grupa vseh Liejevih avtomorfizemov } \mathfrak{g}.$$

Ta reprezentacija je zvesta (faithful), kar je ravno prejšnja posledica.

Oglejmo si sedaj prirejeno reprezentacijo podgrupe vseh konjugiranj σ_g:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\sigma"] & \operatorname{Aut} G \arrow[r, "\text{dif. v } \mathbb{1}"] & \operatorname{Aut} \mathfrak{g} \\ g \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "Ad"'] & \sigma(g) \arrow[r, mapsto] & d\sigma(g)_{\mathbb{1}} \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rccl} Ad\colon & G & \to & \operatorname{Aut} \mathfrak{g} \quad \text{je adjungirana reprezentacija } G \\ & g & \mapsto & d\sigma(g)_{\mathbb{1}} \end{array}$$

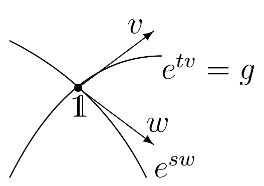
Z diferenciranjem preslikave $Ad\colon G \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ v identiteti $\mathbb{1} \in G$ dobimo adjungirano reprezentacijo Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ v $\operatorname{End} \mathfrak{g}$:

$$dAd_{\mathbb{1}} : T_{\mathbb{1}} G = \mathfrak{g} \xrightarrow{ad} T_{\mathbb{1}} \operatorname{Aut} \mathfrak{g} = \operatorname{End} \mathfrak{g}.$$

Trditev 23. *Za vsak $v \in \mathfrak{g}$ velja*

$$ad(v)w = [w, v] \quad \forall w \in \mathfrak{g}.$$

Dokaz. Izberemo lokalne koordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$ na G v okolici $\mathbb{1}$, $x(\mathbb{1}) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.
$\mathfrak{g} \ni v \rightsquigarrow V = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ levo invariantno vektorsko polje na G
$\mathfrak{g} \ni w \rightsquigarrow W = \sum_{j=1}^n \eta_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$
Fiksirajmo $t \in \mathbb{R}$.



$$\sigma(g)e^{sw} = ge^{sw}g^{-1} = e^{tv}e^{sw}e^{-tv}$$

Za fiksen t je

$$Ad(e^t v)w = d\sigma(e^{tv})\Big|_{\mathbb{1}} \cdot w = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \sigma(e^{tv})e^{sw}.$$

Z odvajanjem po t pri $t = 0$ dobimo:

$$ad(v)w = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (Ad(e^{tv})w) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Big|_{t=s=0} e^{tv}e^{sw}e^{-tv}$$

Z Liejevim razvojem toka ni težko videti, da je ta izraz enak $[w, v]$. $\square$

Poglavje V

NESINGULARNE PRESLIKAVE IN TRANSVERZALNOST

V.1 Sardov izrek

Definicija 36. Naj bo $f\colon M^m \to N^n$ $\mathcal{C}^r$-preslikava, $r \geq 1$. Točka $q \in N$ je *regularna vrednost* preslikave f, če za vse točke $p \in f^{-1}(q)$ velja

$$\operatorname{rang}_p f = \operatorname{rang}\,(df_p\colon T_pM \to T_qN) = n = \dim N.$$

Vsaka točka $q \in N \setminus f(M)$ je regularna vrednost f (pogoj je na prazno izpolnjen). Točka $q \in N$, ki ni regularna vrednost f, se imenuje *kritična vrednost*.

Opomba.

1. Če je $m < n$, potem je $q \in N$ regularna točka f natanko tedaj, ko $q \notin f(M)$.
2. Če je $m \geq n$, potem je $q \in N$ regularna točka f natanko tedaj, ko bodisi $q \notin f(M)$ bodisi $q \in f(M)$ in je f submerzija v vsaki točki $p \in f^{-1}(q)$.

Definicija 37. Točka $p \in M$ je kritična točka f, če $\operatorname{rang}_p f < n = \dim N$.

Torej je $q \in N$ kritična vrednost f natanko tedaj, ko obstaja točka $p \in f^{-1}(q)$, ki je kritična točka f.

Zanima nas, kako velika (majhna) je množica kritičnih vrednosti.

Izrek 23 (Sard, 1942)**.** *Naj bo $f\colon M^m \to N^n$ $\mathcal{C}^r$-preslikava, pri čemer je $r \geq \max\{0, m-n\}+1 \geq 1$. Potem ima množica njenih kritičnih vrednosti mero 0 v N in je prve kategorije (to je unija največ števno mnogo zaprtih nikjer gostih podmnožic).*

Izrek z drugimi besedami: Skoraj vsaka točka $q \in N$ je regularna vrednost f.

Poseben primer: $m < n$, $f\colon M^m \to N^n \Rightarrow$ množica $f(M)$ ima mero 0 v N (H. Whitney, 1936).

Posledica 12. *Za skoraj vsak $q \in N$ je $f^{-1}(q)$ prazna ali pa podmnogoterost v M.*

Izrek 24 (Baire)**.** *V polnem metričnem prostoru je množice prve kategorije brez notranjosti.*

Ekvivalentno: števni presek odprtih povsod gostih množic je povsod gost (množica 2. kategorije).
"Generična točka" pomeni točko iz neke množice 2. kategorije v Baireovem prostoru (ki je lahko odvisna od konkretne situacije).

Sardov izrek lahko torej povemo z besedami: *Generična točka $q \in N$ je regularna vrednost gladke preslikave $f\colon M \to N$.*

Glavni posebni primer: $N = \mathbb{R}$. V tem primeru je to Morsejeva lema*:*

Lema 7 (Morse, 1939)**.** *Če je $f\colon M^m \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $\mathcal{C}^m$, potem je množica $f(\operatorname{Crit} f) \subset \mathbb{R}$ prve kategorije in ima mero 0.*

Dokaz. Dovolj je lemo dokazati za primer, ko je M zaprta krogla (ali zaprt kvader) v $\mathbb{R}^m$. Mnogoterost M lahko pokrijemo s končno ali števno podmnožicami, ki so difeomorfne zaprti krogli (ali zaprtemu kvadru) v $\mathbb{R}^m$. Dokazovane lastnosti (mera 0, 1. kategorija) dopuščajo števne unije.

Naj bo torej $M = \overline{B} \subset \mathbb{R}^m$ in $f(x_1, \dots, x_m)$ funkcija razreda $\mathcal{C}^m$ na M.

Indukcija na m.

$m = 1$: $\overline{B}$ zaprt interval v $\mathbb{R}$.
$\operatorname{Crit} f = \{x \in \overline{B}\colon f'(x) = 0\}$ je zaprta, kompaktna. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f' zvezna in zato enakomerno zvezna, $\exists \delta > 0$, da za $x, x' \in \overline{B}$, $|x - x'| < \delta$ velja $|f'(x) - f'(x')| < \epsilon$. Če vzamemo $x \in \operatorname{Crit} f$, je $f'(x) = 0$ in zato $|f'(x)| < \varepsilon$.
Pokrijemo $\operatorname{Crit} f$ s končno mnogo intervali $I_1, \dots, I_n$, dolžine $|I_j| < \delta$, $I_j \cap \operatorname{Crit} f \neq \emptyset$. Zanima nas ocena za dolžino $|f(I_j)|$ (dolžina slike). $\forall x \in I_j$ velja po Lagrangeu $|f(x') - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |x' - x|$ kjer je $\xi \in I_j$ neka vmesna točka. $\xi - x < \delta$ ker je $|I_j| < \delta$ in $x \in \operatorname{Crit} f \Rightarrow |f'(\xi)| < \varepsilon$. Torej dobimo $|f(x') - f(x)| < \epsilon\delta$ $\forall x' \in I_j \Rightarrow |f(I_j)| \leq \epsilon\delta$.
Število potrebnih intervalov I_j je $\sim N = \frac{|\overline{B}|}{\delta} \Rightarrow f(\operatorname{Crit} f) \subset \bigcup_{j=1}^{N} f(I_j)$, $|f(\operatorname{Crit} f)| \leq$

$\sum\limits_{j=1}^{n} |f(I_j)| \leq N \cdot \varepsilon \cdot \delta \lessapprox \frac{|B|}{\delta} \cdot \varepsilon \cdot \delta = |B| \cdot \varepsilon$. To velja za $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow |f(\operatorname{Crit} f)| = 0$.
Opomba: popolnoma analogen dokaz v primeru: $f \colon \overline{B} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1$.

Induktivni korak: $m-1 \Rightarrow m$.
Recimo, da izrek velja za funkcije na mnogoterostih dim $\leq m-1$.
Naj bo $I = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ multiindeks, $|I| = i_1 + \ldots + i_m$, $\frac{\partial^{|I|} f}{\partial X^I} = \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_m^{i_m}}$, $|I| \leq m$.
Stratificiramo $\overline{B}$:

$$\overline{B} \supset \Sigma^1 \overset{def}{=} \operatorname{Crit} f \supset \Sigma^2 \supset \ldots \supset \Sigma^m$$

$$\Sigma^k \overset{def}{=} \{x \in \overline{B} \colon \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x^I}(x) = 0 \ \forall 1 \leq |I| \leq k\} \quad \text{(vsi parcialni odvodi } f \text{ reda 1 do } k \text{ s 0)}$$

Trdimo, da za vsak $k = 1, 2, \ldots, m-1$ velja:

$$\operatorname{Crit} f = \Sigma^1 \supset S_k \overset{def}{=} \Sigma^k \setminus \Sigma^{k-1} \subset \bigcup_{|I|=k} H_I$$

pri čemer je

$$H_I \overset{def}{=} \{x \in \overline{B} \colon \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x^I}(x) = 0,\ d(\partial^I f)(x) \neq 0\} \quad \text{(vsaj en parcialen odvod od } \partial^I f \text{ ni nič)}$$

Sledi

$$S_k \subset \bigcup_{|I|=k} \operatorname{Crit}(f|_{H_I})$$

Dokaz: $x \in S_k \Leftrightarrow \partial^I f(x) = 0 \ \forall |I| \leq k$ in $\exists |J| = k+1$, $\partial^J f(x) \neq 0$.
$J = (j_1, \ldots, j_m)$, recimo da je $j_k > 0$.
$I = (j_1, \ldots, j_k - 1, \ldots, j_m)$
$\Rightarrow x \in H_I$, $\frac{\partial}{\partial x_k}(\partial^I f)(x) = \partial^J f(x) \neq 0$.
Iz definicije H_I sledi, da je H_I gladka (razreda $m-|I| = m-k$) hiperploskev, ki je regularna podmnogoterost (saj je definirana z eno funkcijo $\partial^I f$, ki ima neničeln diferencial vzdolž H_I).
Torej izrek že velja za $f|_{H_I} \colon H_I \to \mathbb{R} \Rightarrow |f(\operatorname{Crit} f|_{H_I})| = 0 \Rightarrow |f(\operatorname{Crit} f \cap S_k)| = 0 \ \forall k = 1, \ldots, m-1$.
Pokazati samo še $|f(\Sigma^m)| = 0$.

$$\operatorname{Crit} f = \Sigma^1 = \underbrace{(\Sigma^1 \setminus \Sigma^2)}_{S_1} \cup \underbrace{(\Sigma^2 \setminus \Sigma^3)}_{S_2} \cup \ldots \cup \Sigma^m = S_1 \cup \ldots \cup S_{m-1} \cup \Sigma^m$$

$|f(S_k)| = 0$, $k = 1, \ldots, m-1$. Na $\sum^m$ so vsi parcialni odvodi f do reda m enaki 0.
$x \in \sum^m$: $f(x') = f(x) + o(|x - x'|^m)$.
Kot prej (za $m = 1$): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ da je $\forall x \in \sum^m$, $\forall x'$ za katerega velja $|x' - x| < \delta$, velja $|f(x) - f(x')| < \varepsilon \delta^m$. f preslika kroglo $K(x, \delta)$ v interval dolžine $\leq \varepsilon \cdot \delta^m$. Z $N \lessapprox \frac{konst.}{\delta^m}$

kroglami polmera δ pokrijemo množico $\sum^m \Rightarrow |f(\sum^m)| \leq N \cdot \varepsilon \cdot \delta^m \lessapprox \frac{1}{\delta^m} \cdot \varepsilon \cdot \delta^m = \varepsilon \Rightarrow |f(\sum^m)| = 0$.

Dokaz za $N = \mathbb{R}^n$.
1. možnost: podobno kot zgoraj. Začnemo z $n = m$ in indukcija na m, ki narašča. Za $m < n$:

$$M \times \mathbb{R}^{m-n} \supset M \times 0 = M^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n, \qquad |f(M^m)| = 0$$

2. možnost: indukcija na n.
$n = 2$: $(f_1, f_2)\colon M \to \mathbb{R}^2$. Za $f_1\colon M \to \mathbb{R}$ izrek že velja, skoraj vsak $c_1 \in \mathbb{R}$ je regularna vrednost funkcije f_1. $f_{2\{f_1=c_1\}}$ ima skoraj vsak $c_2 \in \mathbb{R}$ za regularno vrednost. Za tako izbrana c_1, c_2 je $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ regularna vrednost $f = (f_1, f_2)$. Ta argument pokaže, da je množica regularnih vrednosti (c_1, c_2) povsod gosta v $\mathbb{R}^2$. Če je M kompaktna, je ta množica tudi odprta ($\operatorname{Crit} f$ je zaprta, zato kompaktna $\Rightarrow f(\operatorname{Crit} f)$ kompaktna). Ker je $\forall M$ števna unija kompaktnih domen v M, je $f(\operatorname{Crit} f)$ števna unija zaprtih, nikjer gostih množic (1. kategorije).

Splošen primer: $M = \bigcup\limits_j B_j$, $N = \bigcup\limits_j D_j$, $\overline{B}_j$ kompakt, $\overline{D}_j$ kompakt, $f(\overline{B}_j) \subset D_j$. Lahko vzamemo, da je $\overline{B}_j$ kompaktna množica v $\mathbb{R}^m$ in $\overline{D}_j \approx$ kompaktna množica v $\mathbb{R}^n$.

$$f(\operatorname{Crit} f) = \bigcup_j f(\operatorname{Crit} f|_{\overline{B}_j})$$

za to pa že vemo, da so 1. kategorije, torej mere 0. □

V.2 Transverzalnost

Naj bodo M in $Z \subset N$ gladke mnogoterosti, vsaj $\mathcal{C}^1$, Z podmnogoterost v N in $f\colon M \to N$ gladka preslikava, $x \in M$, $f(x) \in Z$.

Definicija 38. $f \pitchfork_x Z$ (f je v točki x transverzalna na Z) $\Leftrightarrow df_x(T_xM) + T_{f(x)}Z = T_{f(x)}N$.

$f \pitchfork Z \Leftrightarrow f \pitchfork_x Z \ \forall x \in f^{-1}(Z)$

Trditev 24. *Če je $f \pitchfork Z$, potem je $f^{-1}(Z)$ gladka podmnogoterost v M,* $\operatorname{codim}(f^{-1}(Z), M) \dim M - \dim f^{-1}(Z) = \operatorname{codim}(Z, N) = \dim N - \dim Z$.

Dokaz. Izrek o implicitni funkciji plus linearna algebra. □

Poseben primer: $Z = \{q\}$ točka v N. Če $q = f(p)$, potem $T_qZ = \{0\}$, $f \pitchfork_p \{q\} \Leftrightarrow df_p(T_pM) = T_qM \Leftrightarrow f$ je submerzija v p (točka p je regularna točka preslikave f)

$$f \pitchfork Z \Leftrightarrow \forall p \in M \ f \pitchfork_p Z$$

Opomba. Če je $\dim M + \dim Z < \dim N$, potem je $f \pitchfork Z \Leftrightarrow Z = \emptyset$.

$$q = f(p) \in Z\colon\ T_pM \xrightarrow{df_p} T_qN \xrightarrow{\tau} \underbrace{\nu_q = T_qN/_{T_qZ}}_{\text{normalni prostor } Z \text{ v } N \text{ v } q} \to 0.$$

Pogoj transverzalnosti je ekvivalenten: $\tau \circ df_p\colon T_pM \twoheadrightarrow \nu_q$ je surjektivna (ker $\ker \tau = T_qZ$) Če izberemo v okolici $U \subset N$ točke q lokalne definicijske funkcije $g_1, \dots, g_d$ za $Z \cap U = \{y \in U\colon g_1(y) = 0, \dots, g_d(y) = 0\}$ z neodvisnimi diferenciali $dg_1, \dots, dg_d$, $g = (g_1, \dots, g_g)\colon U \to \mathbb{R}^d$ potem je $\tau\colon T_qN \to \nu_q \cong \mathbb{R}^d$ predstavljena z dg_q. Torej je $f \pitchfork_p Z \Leftrightarrow dg_q \circ df_p\colon T_pM \to \nu_q \cong \mathbb{R}^d$ je surjektivna $\Leftrightarrow dg_q \circ df_p = d(g \circ f)_p\colon T_pM \to \mathbb{R}^d$ surjektivna.
$g \circ f = (g_1 \circ f, \dots, g_d \circ f)$ lokalno definicijske funkcije za prasliko $f^{-1}(Z) = \{x \in M\colon f(x) \in Z\}$.
Iz zgornjega sledi: $f \pitchfork_p Z \Leftrightarrow d(g_1 \circ f)_p, \dots, d(g_d \circ f)_p$ so linearno neodvisni. To je ekvivalentno dejstvu, da je $f^{-1}(Z)$ podmnogoterost kodimenzije d v M v neki okolici p. Dokazali smo:

Trditev 25. *$f \pitchfork_p Z \Leftrightarrow f^{-1}(Z)$ je podmnogoterost M v okolici točke p. $f \pitchfork Z \Rightarrow f^{-1}(Z)$ je podmnogoerost M,* $\operatorname{codim}(f^{-1}(Z), M) = \operatorname{codim}(Z, N)$.

Radi bi dokazali, da lahko vsako gladko preslikavo $f\colon M \to N$ aproksimiramo (poljubno dobro) z neko preslikavo $\tilde{f}\colon M \to N$, ki je transvezalna na dano podmnogoterost $Z \subset N$. Osnovna ideja (R. Abraham, Bulletin AMS, 69(1963)): Namesto ene preslikave gledamo družino preslikav.

$$F\colon M \times \mathbb{R}^m \to N \supset Z, \qquad F(\cdot, y) = f_y\colon M \to N$$

Definicija 39. f je submerzivna družina preslikav (ali dominanten sprej preslikav), če je $\forall (x,y) \in M \times \mathbb{R}^m$ parcialni diferencial $(\partial_y F)_{(x,y)}\colon T_{(x,y)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \xrightarrow{sur.} T_{F(x,y)}N$ (v praksi ne potrebujemo vsega $\mathbb{R}^m$, lahko vzamemo npr. $D \subset \mathbb{R}^m$ ali mnogoterost).

Ekvivalentno: $\forall x \in M$ je preslikava $\mathbb{R}^m \ni y \to F(x,y) \in N$ submerzija.

Primer 44. $N = \mathbb{R}^m$, $f\colon M \to N = \mathbb{R}^n$, $F\colon M \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f(\cdot, 0) = f$, $(x,y) \mapsto f(x) + y$ (translati preslikave f).

Izrek 25. *Če je $F\colon M \times \mathbb{R}^m \to N$ submerzivna družina preslikava in je $Z \subset N$ zaprta podmnogoterost, potem je za skoraj vsak $y \in \mathbb{R}^m$ preslikava $F(\cdot, y) = f_y\colon M \to N$ transverzalna na Z.*

Dokaz. Iz pogojev sledi, da je F submerzija. Potem je $S \overset{def}{=} F^{-1}(Z)$ gladka podmnogoterost v $M \times \mathbb{R}^m$ kodimenzije $d = \operatorname{codim}(Z, N)$. Označimo projekcijo $\pi\colon M \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^m$.

Trditev 26. *Za $\forall y \in \mathbb{R}^m$ velja $f_y \pitchfork Z \Leftrightarrow y$ je regularna vrednost projekcije $\pi|_S\colon S \to \mathbb{R}^m$.*

Dokaz. Fiksiramo $(x,y) \in S$
$dF_{(x,y)} \colon T_{(x,y)}S \twoheadrightarrow T_qZ$ $(T_{(x,y)}S = (dF_{(x,y)})^{-1}(T_qZ))$
$dF_{(x,y)} \colon \Lambda \xrightarrow{\cong} \nu_q$ normala na Z v N
$T_{(x,y)}(M \times \mathbb{R}^m) = T_{(x,y)}S \oplus \Lambda$
Y je regularna vrednost $\pi|_S \Leftrightarrow d\pi_{(x,y)} \colon T_{(x,y)}S \xrightarrow{sur.} T_y\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$ normalo Λ na S v (x,y) lahko izberemo tako, da je $\Lambda \subset \ker d\pi_{(x,y)} = T_{(x,y)}(M \times \{y\}) \cong T_xM$. Od prej vemo, da $dF(x,y)$ preslika to normalo $\Lambda \subset T_{(x,y)}(M \times \{y\})$ izomorfno na neko normalo ν na Z v T_qN. $dF_{(x,y)}|_\Lambda = d(f_y)_x \colon \Lambda \xrightarrow{\cong} \nu$, kjer je $f_y = F(\cdot,y) \Rightarrow \underbrace{(df_y)_x(T_xM)}_{(df_y)_x(\Lambda)=\nu} + T_qZ = T_qN$.

S tem smo dokazali trditev. Izrek sledi iz Sardovega izreka (skoraj vsak $y \in \mathbb{R}^m$ je regularna vrednost preslikave $\pi|_S \colon S \to \mathbb{R}^m$).

Opomba. Če je $f \pitchfork Z$, potem je za $\forall K^{komp.} \subset M$ vsaka $f' \colon M \to Z$, ki je na K dovolj $\mathcal{C}^1$-blizu f, tudi transverzalna na Z na K ($\forall x \in K\colon f' \pitchfork_x Z$). To je zato, ker je transverzalnost odprt (stabilen) pogoj.

Trditev 27. *Če je M kompaktna, lahko vsako preslikavo $M \xrightarrow{f} N$ vložimo v submerzivno družino.*

$$F \colon M \times D \to N \quad \text{submerzivna družina, } F(\cdot,y) = f$$

Dokaz. Ker je množica $f(M) \subset N$ kompaktna, obstajajo vektorska polja $V_1,\ldots,V_m$ na N, ki generirajo T_yN za $\forall y \in f(M)$. Naj bo φ_t^j tok polja V_j (obstaja za majhne $|t|$), $F(x,y_1,\ldots,y_m) = \varphi_{y_1}^1 \circ \ldots \circ \varphi_{y_m}^m(f(x))$. F je dobro definirana na $M \times D$¡ kjer je $0 \in D \subset \mathbb{R}^m$ krogla.

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{(x,0,\ldots,0)} F(x,y) = V_j|_{F(x,0)=f(x)} \qquad \text{lin. neodvisni}$$

Submerzivnostni pogoj torej velja pri $y = 0$ in ker je ta pogoj odprt, velja tudi v neki okolici za dovolj majhne $|y|$.

Uporaba transverzalnostnega izreka.

Presečna teorija: Z podmnogoterost, $X, Y \subset Z$ sklenjeni podmnogoterosti
Če $\dim X + \dim Y < \dim Z \Rightarrow X$ in Y se generično ne sekata (eno malce perturbiramo in postaneta transverzalni, kar pomeni, da se ne sekata).
Če $\dim X + \dim Y = \dim Z \Rightarrow X \cap Y$ je generično podmnogoterost dimenzije 0, torej je $X \cap Y$ končna množica točk.

$$\begin{matrix} T_pX + T_pY = T_pZ \\ T_pX \cap T_pY = \{0\} \end{matrix} \qquad \text{če vse tri orientirane}$$

Točki $p \in X \cap Y$ priredimo število $\delta(p) = \pm 1$ glede na to ali se orientaciji na T_pX, T_pY dopolnita do $+$ ali do $-$ orientacije na T_pZ.

Definicija 40. $X \cdot Y \stackrel{def}{=} \sum\limits_{p \in X \cap Y} \delta(p)$ je presečno število.

$X \cdot Y$ je neodvisno od gladkih deformacij X in Y v Z.
Poseben primer: X kompaktna mnogoterost dimenzije n, $E \stackrel{\pi}{\to} X^n$ vektorski sveženj. $\chi(E) = X \cdot X \stackrel{def}{X} \cdot X'$ (Eulerjevo število), X' generična deformacija X v E. Če $E = TX$, je to Hopfov izrek: $\chi(TX) = X \cdot X' = \chi(X)$ s triangulacijo, X' je graf vektorskega polja, $X \cdot X'$ je število ničel polja V, šteto $\pm$ glede na orientacijo.

Literatura

[AMR] Abraham, R., Marsden, J. E., Ratiu, T.: Manifolds, tensor analysis, and applications. Second ed. Applied Mathematical Sciences **75**, Springer-Verlag, New York, 1988

[B] Boothby, W. M.: An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. Academic Press, Orlando, 1986.

[F] Forstnerič, F.: Stein Manifolds and Holomorphic Mappings. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 56, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011

[GP] Guillemin, V. & Pollack, A.: Differential topology. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974

[H] Hirsch, M. W.: Differential topology. Springer-Verlag, New York, 1994

[S] Spivak, M.: Calculus on manifolds (A modern approach to classical theorems of advanced calculus). W. A. Benjamin, New York-Amsterdam, 1965

[W] Warner, F. W.: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983