VIII. GREENOVA FUNKCIJA IN POISSONOVA FORMULA V RAVNINI

VIII.1. POISSONOVA FORMULA NA KROGU

Naj bo $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
$= \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

IZREK. Če je $u \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{D})$ zvezna funkcija na $\overline{\mathbb{D}}$, ki je harmonična na $\mathbb{D}$, potem za vsako točko $z_0 = r e^{i\theta_0} \in \mathbb{D}$ velja naslednja Poissonova formula:

$$(1.1) \qquad u(re^{i\theta_0}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \theta_0) + r^2} \cdot d\theta$$

OPOMBA: Funkcija

$$P_{z_0}(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cdot\cos(\theta - \theta_0) + r^2} \quad ; \quad z_0 = r e^{i\theta_0}$$

se imenuje Poissonovo jedro za točko $z_0 = r e^{i\theta_0}$.

Če pišemo $P_r(\theta) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$, (1.2)

je $P_{re^{i\theta_0}}(\theta) = P_r(\theta - \theta_0) = P_r(\theta_0 - \theta)$. (1.3)

Integral v (1.1) je torej konvolucijskega tipa:

(1.4) $$u(re^{i\theta_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\cdot P_r(\theta_0-\theta)\cdot d\theta .$$

Dokaz. Označimo s $\varphi(z)$ funkcijo

(1.5) $$\varphi(z) = \frac{z - z_0}{1-\overline{z_0}\cdot z} = \frac{z - re^{i\theta_0}}{1-re^{-i\theta_0}\cdot z} .$$

Lahko preverimo, da je $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$ holomorfni avtomorfizem diska, $\varphi(z_0)=0$, $\varphi(\partial D)=\partial D$.

Označimo $\varphi(e^{i\theta}) = e^{i\tau(\theta)}$, kjer je funkcija $\tau=\tau(\theta)$ definirana modulo 2π.

Ker je kompozicija harmonične funkcije ter holomorfne funkcije ~~$\varphi(z)$~~ spet harmonična, je $u(\varphi^{-1}(z))$ holomorfna na $z\in D$ ter zvezna na $z\in\overline{D}$.(*) Poleg tega harmonična funkcija zadošča lastnosti povprečne vrednosti (glej. razdelek VII.3). Odtod sledi:

(*) Glej VII.2.

VIII. 3.

$$u(z_0) = u(\varphi^{-1}(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varphi^{-1}(e^{i\tau}))\cdot d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\cdot \frac{d\tau}{d\theta}\cdot d\theta .$$

Odvod $\frac{d\tau}{d\theta}$ izračunamo tako, da zvezo

$\varphi(e^{i\theta}) = e^{i\tau(\theta)}$ odvajamo po θ:

$$\varphi'(e^{i\theta})\cdot i e^{i\theta} = i e^{i\tau(\theta)}\cdot \frac{d\tau}{d\theta} = i\varphi(e^{i\theta})\cdot \frac{d\tau}{d\theta}$$

Iz (1.5) dobimo:

$$\varphi'(z) = \frac{(1-\bar z_0 z) - (z - z_0)\cdot(-\bar z_0)}{(1-\bar z_0 z)^2} = \frac{1-|z_0|^2}{(1-\bar z_0 z)^2}$$

$$\frac{d\tau}{d\theta} = e^{i\theta}\cdot \frac{\varphi'(e^{i\theta})}{\varphi(e^{i\theta})} = e^{i\theta}\cdot \frac{1-|z_0|^2}{(1-\bar z_0 e^{i\theta})^2}\cdot \frac{1-\bar z_0 e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_0}$$

$$= \frac{1-|z_0|^2}{1-\bar z_0 e^{i\theta}}\cdot \frac{1}{1-z_0 e^{-i\theta}} = \frac{1-|z_0|^2}{|1-\bar z_0 e^{i\theta}|^2}$$

$$= \frac{1-r^2}{1-2r\cdot\cos(\theta-\theta_0)+r^2} = P_r(\theta-\theta_0)$$

S tem je formula (1.1) dokazana.

VIII.2. Rešitev Dirichletovega problema na disku

Naj bo $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ in $t \in \mathbb{R}$. Formula (1.3) za Poissonovo jedro:

$$P_z(t) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} = P_r(\theta-t)$$

kjer je $P_r(t) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$. (2.1)

Trditev: $$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = P_z(t) + i\,Q_z(t)$$

kjer je $P_z(t)$ Poissonovo jedro (2.1) in je

$$Q_z(t) = \frac{2r\cdot\sin(\theta-t)}{1-2r\cos t + r^2} \qquad (2.2)$$

konjugirano Poissonovo jedro.

Dokaz: $$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \frac{(e^{it}+z)(e^{-it}-\bar{z})}{|e^{it}-z|^2} =$$

$$= \frac{1-|z|^2 + e^{-it}z - \bar{z}e^{it}}{|e^{it}-z|^2}$$

$$= \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} + \frac{re^{i(\theta-t)} - re^{i(t-\theta)}}{|e^{it}-z|^2}$$

Očitno je Realni del ravno $P_z(t)$ (2.1) in imaginarni del $Q_z(t)$ (2.2).

Ker je funkcija $z \longmapsto \dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ holomorfna na $\mathbb{C}\setminus\{e^{it}\}$ za vsak $t\in\mathbb{R}$, sta funkciji $P_z(t)$, $Q_z(t)$ harmonični na $\mathbb{D}=\{|z|<1\}$ za vsak $t\in\mathbb{R}$.

Fourierov razvoj funkcije $P_z(t)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} &= \frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}} \\
&= \left(1+re^{i(\theta-t)}\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty} r^k\cdot e^{ik(\theta-t)} \\
&= 1+2\cdot\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cdot e^{ik(\theta-t)} \\
&= 1+2\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cdot\left(\cos k(\theta-t)+i\sin k(\theta-t)\right)
\end{aligned}
$$

Odtod sledi:

$$
\begin{aligned}
P_z(t) = \operatorname{Re}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} &= 1+2\sum_{k=1} r^k\cdot\cos k(\theta-t) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|}\cdot e^{ik(\theta-t)}. \qquad \cancel{(2.3)}
\end{aligned}
$$

Pišimo:

$$P_r(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+r}{e^{it}-r}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \cdot e^{int}. \quad (2.3)$$

Tedaj je

$$P_z(t) = P_{re^{i\theta}}(t) = P_r(\theta - t);$$

$$0 \leq r < 1; \quad t \in \mathbb{R}.$$

<u>TRDITEV</u>. Funkcija $P_r(t)$ zadošča naslednjim lastnostim:

(a) $\left.\begin{array}{l} P_r(t) > 0 \\ P_r(-t) = P_r^*(t) \end{array}\right\} \forall\, 0 \leq r < 1, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $P_r(t) < P_r(\delta); \quad 0 < \delta < |t| \leq \pi$

(c) $\lim\limits_{r \uparrow 1} P_r(\delta) = 0, \quad 0 < \delta \leq \pi$

(d) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t) = 1, \quad 0 \leq r < 1.$

<u>OPOMBA</u>. Iz lastnosti (b) in (c) sledi;

$$\lim_{r \uparrow 1} \sup_{0 < \delta \leq |t| \leq \pi} P_r(t) = 0; \quad \forall \delta > 0.$$

Skupaj z (d) sledi, da je $\{P_r(t)\}_{0 \leq r < 1}$ aproksimativna enota.

Vse trditve sledijo očitno ~~iz~~ (2.3).

IZREK. Za vsako zvezno funkcijo $f(t)$ na krožnici

$$S = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\} = \partial \mathbb{D} \quad (\text{torej } f(0) = f(2\pi)) \text{ je}$$

funkcija

$$u(z) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\cdot f(t)\,dt \tag{2.4}$$

harmonična na disku $\mathbb{D}$, zvezna na $\overline{\mathbb{D}}$, in

$$u = f \quad \text{na } \partial\mathbb{D}.$$

Torej je u rešitev Dirichletovega problema na $\mathbb{D}$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{na } \mathbb{D}, \\ u = f & \text{na } \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

Funkcija u, podana z (2.4), se imenuje Poissonova transformacija funkcije $f \in C(S)$.

Dokaz. Funkcijo $u(z)$ lahko zapišemo v obliki

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(t) f(t)\,dt .$$

Ker je $P_z(t)$ harmonična na $z \in \mathbb{D}$ za vsak $t \in \mathbb{R}$, sledi, da je $u(z)$ harmonična na $\mathbb{D}$.

Sedaj bomo dokazali, da se $u(z)$ razširi do zvezne funkcije na $\overline{\mathbb{D}}$ in velja $u(e^{it}) = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (torej $u|_{\partial \mathbb{D}} = f$). Pišimo

$$u_r(\theta) = u(re^{i\theta}); \qquad 0 \leq r < 1.$$

Dovolj je dokazati:

$$\lim_{r \uparrow 1} \sup_{\theta \in [0,2\pi]} |u_r(\theta) - f(\theta)| = 0 \quad . \qquad (2.5).$$

Velja:

$$u_r(\theta) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\cdot f(\theta)\cdot dt$$

(v zadnjem integralu smo uporabili lastnost (d))

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\cdot\big(f(t) - f(\theta)\big)\cdot dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|t-\theta|<\delta} P_r(\theta - t)\cdot\big(f(t) - f(\theta)\big)\cdot dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |t-\theta| \leq \pi} P_r(\theta - t)\cdot\big(f(t) - f(\theta)\big)\cdot dt \,.$$

To velja za vsak $\delta > 0$.

Izberemo $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna, obstaja $\delta > 0$, tako da velja

$$|t-\theta| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtod sledi:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\theta|<\delta} P_r(\theta - t)\cdot (f(t) - f(\theta))\cdot dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{|t-\theta|<\delta} P_r(\theta-t)\cdot |f(t) - f(\theta)|\cdot dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\theta|<\delta} P_r(\theta - t) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Naj bo $|f(t)| \leq M$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Ker je $\lim_{r\uparrow 1} P_r(\delta) = 0$, obstaja $r_0 \in (0,1)$, tako da velja:

$$r_0 \leq r < 1 \Longrightarrow P_r(\delta) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Iz lastnosti (b) sledi $P_r(\theta - t) < \frac{\varepsilon}{4M}$ za $|\theta - t| \geq \delta$.

Odtod dobimo oceno:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t-\theta| \leq \pi} P_r(\theta-t)\cdot (f(t) - f(\theta))\cdot dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}; \quad r_0 \leq r < 1.$$

Za tak r torej velja $\sup_{\theta} |u_r(\theta) - f(\theta)| \leq \varepsilon$; $r_0 \leq r < 1$.

Izrek je dokazan.

OPOMBA. Naj bo $f(t) = f(e^{it})$ zvezna funkcija na krožnici $S = \partial\mathbb{D}$.

Funkcija
$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\cdot f(t)\cdot dt \qquad (2.5)$$
je holomorfna na disku $z \in \mathbb{D}$, ker je jedro $\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ holomorfna funkcija spremenljivke $z \in \mathbb{D}$.

Če je f realna, je očitno
$$\operatorname{Re} F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_z(t)\cdot f(t)\,dt = u(z). \qquad (2.6)$$

Funkcija
$$Q_z(t) = \operatorname{Im} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \qquad (2.7)$$
se imenuje <u>konjugirano Poissonovo jedro</u> in funkcija
$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_z(t)\cdot f(t)\,dt = \operatorname{Im} F(z)$$
je harmonična konjugiranka funkcije u (2.6) na $\mathbb{D}$.

$$Q_z(t) = \frac{2r\cdot\sin(\theta - t)}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \quad ; \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D},\ t \in \mathbb{R}.$$

VIII.3. Rešitev Dirichletovega problema na enostavno povezanih domenah v $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Označimo Poissonovo jedro na disku $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ z

$$P(z, \zeta) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \quad ; \quad z \in \mathbb{D}, \ \zeta = e^{it} \in \partial\mathbb{D}.$$

Videli smo (glej VIII.1), da za vsako funkcijo $u \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathrm{Harm}(\mathbb{D})$ velja reprezentacijska formula

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P(z, e^{it}) \cdot u(e^{it}) \cdot \frac{dt}{2\pi}$$

$$= \int_{\zeta \in \partial\mathbb{D}} \frac{1}{2\pi} \cdot P(z, \zeta) \cdot u(\zeta) \cdot ds \qquad (3.1)$$

Tu je ds diferencial ločne dolžine na $\partial\mathbb{D} = \{|\zeta| = 1\}$.
Če krožnico parametriziramo z $\zeta = e^{it}$, je

$$ds = \left|\frac{d\zeta}{dt}\right| = |i e^{it}| = 1$$ in dobimo

običajni izraz.

Sedaj bomo izpeljali analogno formulo na vsaki enostavno povezani domeni $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ z gladkim robom.

Po Riemannovem upodobitvenem izreku (glej zapiske za predmet Kompleksna analiza) obstaja biholomorfna preslikava $\phi : \Omega \to \mathbb{D}$.

Če izberemo točko $a \in \Omega$, je ϕ enolično določena z zahtevami $\phi(a) = 0$, $\phi'(a) > 0$.

Če je $\partial\Omega$ gladek, se ϕ razširi do gladkega difeomorfizma $\phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}$, ki preslika rob Ω v $\partial\mathbb{D}$: $\phi : \partial\Omega \to \partial\mathbb{D}$.

Opomba: Če je $\partial\Omega$ razreda $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$ za nek $\varepsilon > 0$, je razširitev ϕ razreda $\mathcal{C}^1$; to je vse, kar bomo potrebovali v nadaljevanju.

Naj bo $z \in \Omega$, $\zeta \in \partial\Omega$. Potem je
$$\varphi(z) \in \mathbb{D}, \quad \varphi(\zeta) = e^{it} \in \partial\mathbb{D}.$$

Naj bo $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{Harm}(\Omega)$. Tedaj je
$$u \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathrm{Harm}(\mathbb{D}).$$

Zato lahko za $u \circ \phi^{-1}$ uporabimo Poissonovo formulo na disku (3.1):

$$u(z) = (u\circ\phi^{-1})(\phi(z)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(\phi(z), e^{it}\right)\cdot\left(u\circ\phi^{-1}\right)\left(e^{it}\right)\cdot dt$$

Funkcija $\zeta = \phi^{-1}(e^{it})$ $(t\in[0,2\pi])$ je parametrizacija $\partial\Omega$. Diferencial ločne dolžine se v tej spremenljivki izraža

$$ds = |\dot\zeta(t)|\cdot dt = \left|(\phi^{-1})'(e^{it})\right|\cdot dt$$
$$= \frac{1}{|\phi'(\zeta)|}\cdot dt$$

Če vstavimo $dt = |\phi'(\zeta)|\cdot ds$ v zgornjo formulo, dobimo (ob upoštevanju $e^{it} = \phi(\zeta)$):

$$u(z) = \int_{\partial\Omega} P_\Omega(z,\zeta)\cdot u(\zeta)\cdot ds \qquad (3.2)$$

kjer je
$$P_\Omega(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\cdot P\left(\phi(z),\phi(\zeta)\right)\cdot|\phi'(\zeta)| \qquad (3.3)$$
$$(z\in\Omega,\ \zeta\in\partial\Omega)$$

<u>Poissonovo jedro za domeno</u> Ω.

Formula (3.2) z jedrom (3.3) velja za poljubno $u\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})\cap \mathrm{Harm}(\Omega)$.

Primer 1. Na krogu $\Omega = \mathbb{D}(a,R) = \{z : |z-a| < R\}$ dobimo za $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{Harm}(\Omega)$:

$$u(z) = u(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2R\cdot r\cdot\cos(\theta - t) + r^2}\cdot u(a + Re^{it})\cdot dt \tag{3.4}$$

Primer 2. Formulo (3.1) lahko pod primernimi dodatnimi pogoji na u uporabimo tudi na enostavno povezanih neomejenih domenah z gladkim robom. Kot primer bomo izračunali Poissonovo jedro za zgornjo polravnino:

$$\mathbb{H} = \{ \cancel{z} = x + iy : x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$$

$$\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}.$$

Naj bo $z = x + iy \in \mathbb{H}$ in $t \in \partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$.

Konformni izomorfizem $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ je podan z

$$\phi(z) = \frac{i - z}{i + z}\ ; \quad z \in \mathbb{H}.$$

Očitno je $\phi(i) = 0$, $\phi(0) = 1$, $\phi(\infty) = -1$.

$t \in \mathbb{R}$: $$|\phi(t)| = \left|\frac{i - t}{i + t}\right| = \sqrt{\frac{1 + t^2}{1 + t^2}} = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Poissonovo jedro $P_{\mathbb{H}}(z,t)$ $(z\in\mathbb{H},\ t\in\partial\mathbb{H}=\mathbb{R})$ je po formuli (3,3) enako

$$P_{\mathbb{H}}(z,t)=\frac{1}{2\pi}\cdot P_{\mathbb{D}}\big(\phi(z),\phi(t)\big)\cdot|\phi'(t)|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-|\phi(z)|^2}{|\phi(t)-\phi(z)|^2}\cdot|\phi'(t)|\ ; \qquad z=x+iy.$$

Račun:

$$1-|\phi(z)|^2=1-\left|\frac{i-z}{i+z}\right|^2=\frac{|i+z|^2-|i-z|^2}{|i+z|^2}=\frac{4y}{x^2+(y+1)^2}$$

$$|\phi(t)-\phi(z)|^2=\left|\frac{i-t}{i+t}-\frac{i-z}{i+z}\right|^2=\frac{|2i(z-t)|^2}{|i+t|^2\cdot|i+z|^2}$$

$$=4\cdot\frac{(x-t)^2+y^2}{(1+t^2)\cdot\big(x^2+(y+1)^2\big)}$$

$$|\phi'(t)|=\left|\frac{-2i}{(i+t)^2}\right|=\frac{4}{|i+t|^2}=\frac{4}{1+t^2}.$$

Odtod sledi, da je Poissonovo jedro na $\mathbb{H}$ enako:

$$P_{\mathbb{H}}(z,t)=P_{\mathbb{H}}(x+iy,t)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{(x-t)^2+y^2} \qquad (3.5)$$

Poissonova formula na zgornji polravnini:

$$u(x+iy)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t)\cdot y}{(x-t)^2+y^2}\cdot dt \qquad (3.6)$$

Formula velja, če je $u\in C(\overline{\mathbb{H}})\cap \mathrm{Harm}(\mathbb{H})$ in $|u|$ raste dovolj počasi v ∞.