II. PARCIALNE DIFERENCIALNE ENAČBE 1. REDA

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots) = 0 \qquad (*)$$

II.1 KVAZILINEARNA PDE 1. REDA: linearna v u_x, u_y.

2 spremenljivki:

$$a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = c(x,y,u) \qquad (1.1)$$

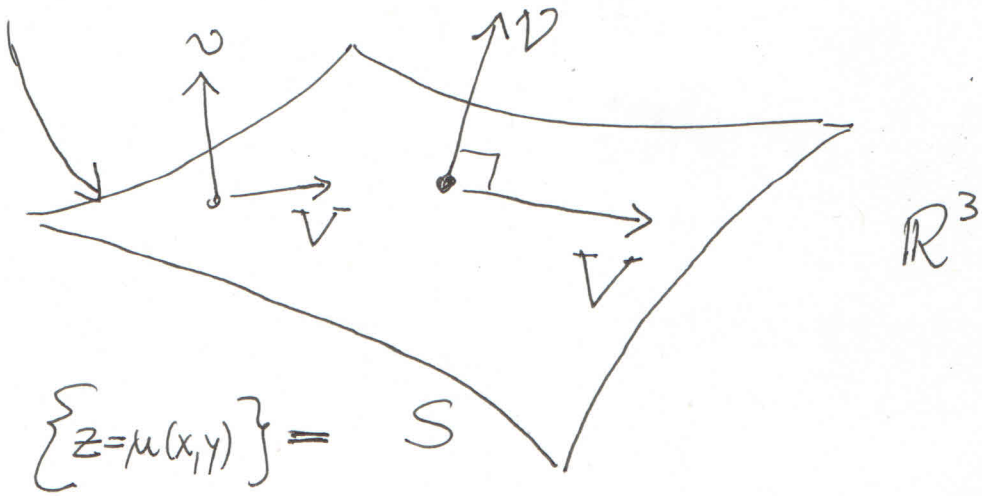
$$\Longleftrightarrow \quad (a, b, c)\cdot(u_x, u_y, -1) = 0 .$$

Vektorsko polje $v = (u_x, u_y, -1)$ je pravokotno na ploskev $z = u(x,y)$.

Enačba (1) torej pomeni, da je <u>karakteristično vektorsko polje</u>:

$$V(x,y,z) \overset{def}{=} \big(a(x,y,z),\ b(x,y,z),\ c(x,y,z)\big) \qquad (1.2)$$

<u>tangentno</u> na vsako integralno ploskev $S: z = u(x,y)$ PDE (1).



Tokovnica polja V = rešitev sistema NDE (ODE):

vektorsko:

$$\dot{\gamma} = V(\gamma(t))$$

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = a(x,y,z) \\ \dot{y} = b(x,y,z) \\ \dot{z} = c(x,y,z) \end{cases}$$

Eksistenčni izrek za NDE:

$\forall (x_0, y_0, z_0) = p_0 \quad \exists!$ tokovnica

$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ polja V, def. na nekem časovnem intervalu t okrog 0,

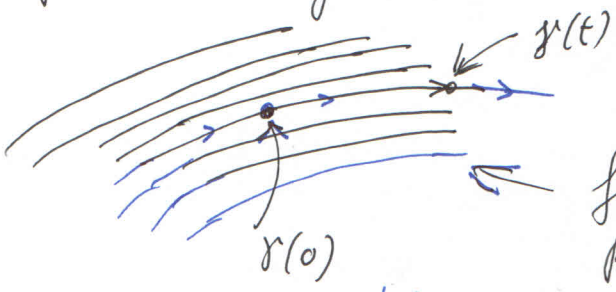
ki zadošča začetnemu pogoju:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0$$

$$(\gamma(0) = p_0).$$ Gladka odvisnost od začet. pogojev.

Tokovnice so parom disjunktne krivulje.

FAZNI PORTRET



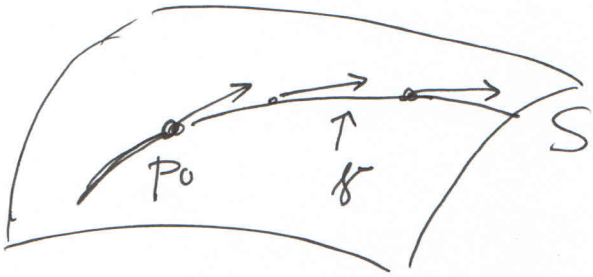
fazni portret polja V.

Definicija: tokovnice karakterističnega vektorskega polja V (1.2) se imenuje karakteristične krivulje ali karakteristike PDE (1.1).

Tok: $\begin{cases} \varphi_t(p) = \varphi_t(x,y,z); \quad \varphi_0(p) = p \\ \varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p)) \qquad (\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s) \\ \varphi_t \text{ difeomorfizem.} \end{cases}$

II. 3

<u>Trditev</u>: Naj bo $S = \{z = u(x,y)\}$ poljubna integralna ploskev (rešitev) PDE (1.1), in naj bo $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ točka na S (torej $z_0 = u(x_0, y_0)$). Potem karakteristična krivulja γ skozi $\gamma(0) = p_0$ leži v ploskvi S.



<u>Dokaz</u>: Označimo:

$$\begin{cases} \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)); \\ \gamma(0) = (x_0, y_0, z_0). \end{cases}$$

Definiramo $U(t) \overset{def}{=} z(t) - u(x(t), y(t))$.

Očitno je $U(0) = z_0 - u(x_0, y_0) = 0$. Odvajamo:

$$\dot{U}(t) = \dot{z}(t) - u_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) - u_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)$$

$$= c(x(t), y(t), z(t)) - u_x(x(t), y(t))\, a(x(t), y(t), z(t))$$

$$- u_y(x(t), y(t)) \cdot b(x(t), y(t), z(t)).$$

Vstavimo $z(t) = U(t) + u(x(t), y(t))$. Izpustimo t.

$$\dot{U} = c(x, y, U + u(x,y)) - u_x(x,y)\, a(x, y, U + u(x,y))$$

$$- u_y(x,y) \cdot b(x, y, U + u(x,y)).$$

U reši to navadno D.E.

Ker je $U(0) = 0$, tudi $U(t) \equiv 0$ reši to enačbo, (ker u reši (1)). Iz enoličnosti sledi $U(t) \equiv 0$. ∎

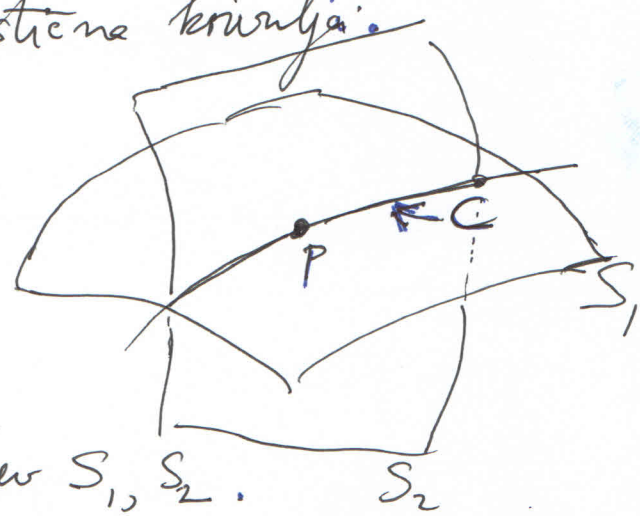
POSLEDICA: Vsaka integralna ploskev PDE (1.1) je unija karakterističnih krivulj, to je, tokovnic vektorskega polja (1.2).

OPOMBA:
To je v bistvu eksistenčni izrek za enačbo (1.1).

POSLEDICA:

1° Če se dve integralni ploskvi S_1, S_2 enačbe (1.1) sekata v neki točki $p \in S_1 \cap S_2$, potem cela tokovnica γ skozi p leži v $S_1 \cap S_2$.

2° Obratno, če je $C = S_1 \cap S_2$ krivulja, ki je presek dveh integralnih ploskev, potem je C karakteristična krivulja.



Dokaz 2°:

Vektorsko polje V (1.2) je $\perp$ na normalna vektorja v_1, v_2 ploskev S_1, S_2.

Tangentno polje krivulje C ima isto lastnost.

Torej je V tangentno na C vzdolž C, zato je C (neparametrizirana) tokovnica polja V (torej karakteristična krivulja). ∎

II.2. Cauchyev problem za kvazilinearno PDE

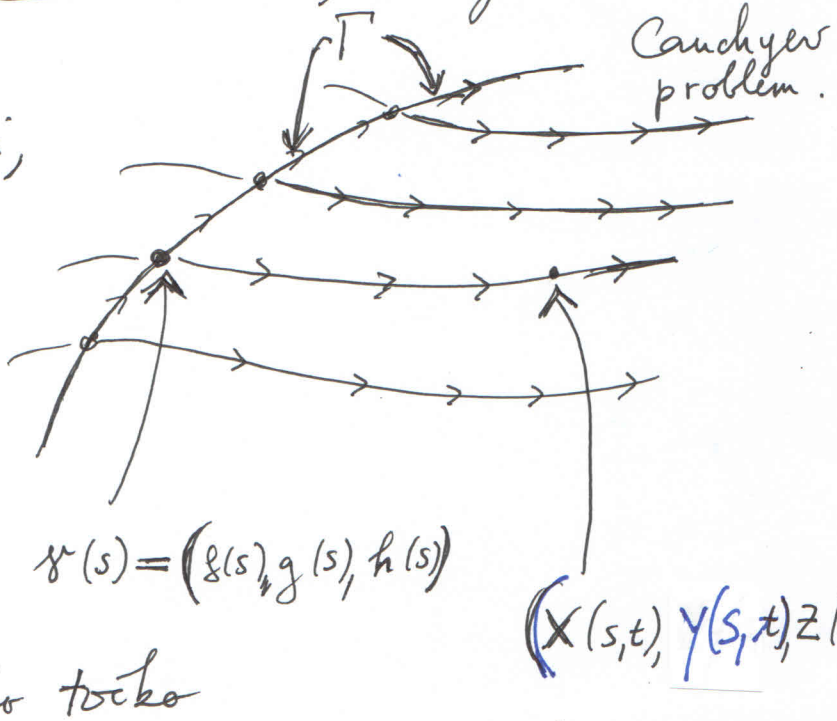
V prejšnjem razdelku smo videli, da je vsaka integralna ploskev enačbe (1.1) unija integralnih krivulj vekt. polja (1.2), to je, karakterističnih krivulj.

Sedaj si bomo ogledali način, kako izberemo konkretno (partikularno) rešitev z zahtevo, da mora le-ta vsebovati neko predpisano (v splošnem nekarakteristično) krivuljo.

Naj bo Γ krivulja,

$$\gamma(s) := \begin{cases} x = f(s), \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases}$$

(parametrizacija)



Skozi vsako točko $\gamma(s) \in \Gamma$ napeljemo karakteristično krivuljo, ki je v času $t=0$ v točki $\gamma(s)$.

Iščemo torej vektorsko funkcijo

$$R(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

ki za vsak fiksen s reši karakteristično enačbo

$$\begin{cases} x_t = a(x,y,z) \\ y_t = b(x,y,z) \\ z_t = c(x,y,z) \end{cases}$$

in začetni pogoj $\begin{cases} x(s,0) = f(s) \\ y(s,0) = g(s) \\ z(s,0) = h(s) \end{cases}$

Po eksistenčnem izreku obstaja za vsak omejen zaprt interval $J \subset \mathbb{R}$ v definicijskem območju preslikave $\varphi(s)$ število $\varepsilon > 0$ (odvisno od J), tako da rešitev $R(s,t)$ obstaja na množici

$$\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s \in J, |t| < \varepsilon\}.$$

S tem dobimo integralno "ploskev" $S \subset \mathbb{R}^3$, parametrizirano z $(s,t) \mapsto R(s,t)$.

<u>Vprašanje</u>: Kdaj je S res ploskev oblike $z = u(x,y)$?

<u>PRIMER</u>: Če je Γ karakteristična krivulja, potem zaloga vrednosti preslikave R leži v Γ; torej ne dobimo ploskve ampak krivulje.

Ideja: Poskušamo rešiti sistem enačb

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \end{cases}$$

na $\begin{cases} s = s(x,y) \\ t = t(x,y) \end{cases}$.

Nato vstavimo rešitev v 3. komponento in dobimo rešitev (integralno ploskev PDE):

$$u(x,y) = z\big(s(x,y),\ t(x,y)\big).$$

Obstoj rešitve nam zagotavlja izrek o implicitni funkciji:

Če za neko točko s_0 velja

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(s_0,0) & \frac{\partial x}{\partial t}(s_0,0) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s_0,0) & \frac{\partial y}{\partial t}(s_0,0) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \left(\text{Jacobijeva det.}\right)$$

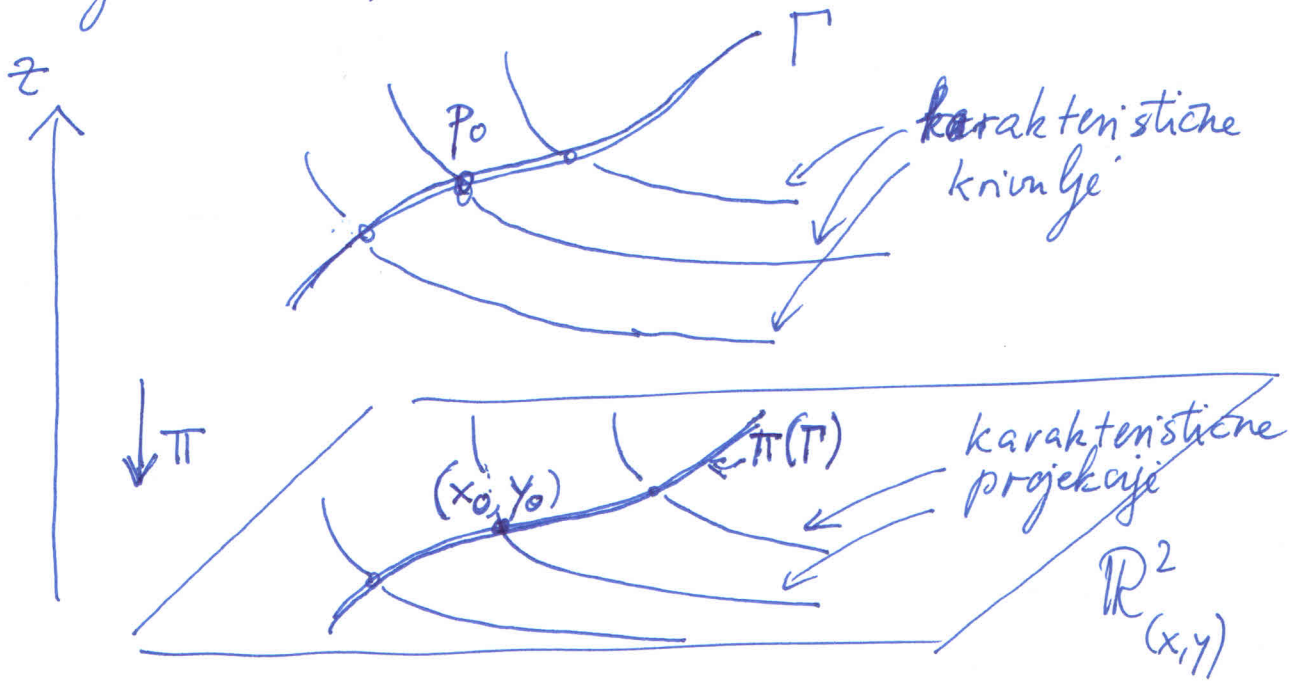
potem rešitev obstaja lokalno v okolici $(s_0,0)$.

Zgornja determinanta je enaka:

(2.1)
$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial s}(s_0) & a(p_0) \\ \frac{\partial g}{\partial s}(s_0) & b(p_0) \end{vmatrix} = b(p_0)\frac{\partial f}{\partial s}(s_0) - a(p_0)\frac{\partial g}{\partial s}(s_0).$$

Pri tem $p_0 = \big(f(s_0), g(s_0), h(s_0)\big) = (x_0, y_0, z_0)$.

Pogoj (2.1) pomeni, da sta projekciji na $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ tangente $\gamma'(s_0)$ na Γ ter karakterističnega vektorja $V(p_0)$ linearno neodvisna.



S tem smo dokazali

<u>IZREK</u> (Obstoj in enoličnost rešitve Cauchyevega problema za kvazilinearno PDE (2.1).

Naj bo Γ pot razreda C^1 v $\mathbb{R}^3$, ki v neki ~~točki~~ s_0 zadošča pogoju (2.1) za njen tangentni vektor $\gamma'(s_0) = (f'(s_0), g'(s_0), h'(s_0))$. Potem obstaja v neki okolici točke $(x_0, y_0) = (f(s_0), g(s_0)) \in \mathbb{R}^2$ natanko ena rešitev $u = u(x,y)$ enačbe (1.1), ki zadošča pogoju

$$u(f(s), g(s)) = h(s)$$

za vsak s blizu s_0. (Ekvivalentno: integralna ploskev $S: z = u(x,y)$ vsebuje dano krivulja Γ v okolici p_0.)

PRIMERI

1°
$$\begin{cases} a u_x + u_y = 0 & \text{(a konstanta)} \\ u(x,0) = h(x) & \text{Cauchyev pogoj.} \end{cases}$$

Karakteristično polje: $V = (a, 1, 0)$ (konstantno)

$\Gamma : s \mapsto (s, 0, h(s))$ začetna krivulja.

Enačba karakteristik:

odvod po t
$$\begin{cases} \dot{x} = a \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} x(s,0) = s \\ y(s,0) = 0 \\ z(s,0) = h(s) \end{array}\right\} \text{ začetni pogoj pri } t=0.$$

Rešitev:
$$\left.\begin{cases} x(s,t) = s + at \\ y(s,t) = 0 + t = t \\ z(s,t) = z(s,0) = h(s) \end{cases}\right\} \text{karakteristike}$$

Rešimo na (s,t) (eliminiramo iz prvih dveh enačb):

$$t = y; \quad s = x - at = x - ay.$$

Za fiksen s imamo premico $x - ay = s$, ki je (x,y)-projekcija karakteristike C_s.

Rešitev: $\boxed{u(x,y) = z(s,t) = h(x-ay)}$

u ima (v tem primeru) konstantno vrednost $h(s)$ na vsaki karakteristiki $x - ay = s$.

2°

$$\begin{cases} a u_x + u_y = c; & a, c \text{ konstanti.} \\ u(x,0) = x^2. & \text{Cauchyev pogoj:} \end{cases}$$

$V = (a, 1, c)$ karakteristično polje

$\Gamma: \quad s \longmapsto (s, 0, s^2)$. začetna krivulja:

<u>Karakteristike</u>:
$$\begin{cases} \dot{x} = a & x(s,0) = s \\ \dot{y} = 1 & y(s,0) = 0 \\ \dot{z} = c & z(s,0) = s^2 \end{cases}$$

<u>Rešitev</u>:
$$\begin{cases} x(s,t) = s + at \\ y(s,t) = t \\ z(s,t) = s^2 + ct \end{cases}$$
za fiksen s je to parametrizacija karakteristike C_s.

Eliminiramo (s,t) iz prvih dveh enačb:

$$t = y, \quad s = x - at = x - ay.$$

<u>Rešitev</u>: $\boxed{u(x,y) = z(s,t) = (x-ay)^2 + cy}$

Integralna ploskev

Projekcija $\pi(C_s)$ je premica $x - ay = s$.
Na njej ima u vrednost $s^2 + cy = (x-ay)^2 + cy$.

(3) $$\begin{cases} u \cdot u_x + u_y = 0 \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}$$

Karakteristično polje: $V = (z, 1, 0)$.

$\Gamma: \; s \mapsto (s, 0, h(s))$ začetna krivulja.

Enačba karakteristik:

$$\begin{cases} \dot{x} = z \quad (= u) \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{aligned} x(s,0) &= s \\ y(s,0) &= 0 \\ z(s,0) &= h(s). \end{aligned}\right\} \text{ začetni (Cauchyev) pogoj}$$

Rešitev: $$\left.\begin{cases} x(s,t) = s + t \cdot h(s) \\ y(s,t) = t \\ z(s,t) = h(s) \end{cases}\right\} C_s = \text{karakteristika}$$

Projekcija $C_s' = \pi(C_s) \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ je premica

$$x = s + t \cdot h(s), \quad y = t.$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = s + h(s) \cdot y \; ; \quad s = x - h(s)\, y$$

(*) [Vrednost rešitve $u = h(s)$ je konstantna na vsaki premici $x = s + h(s) y$.

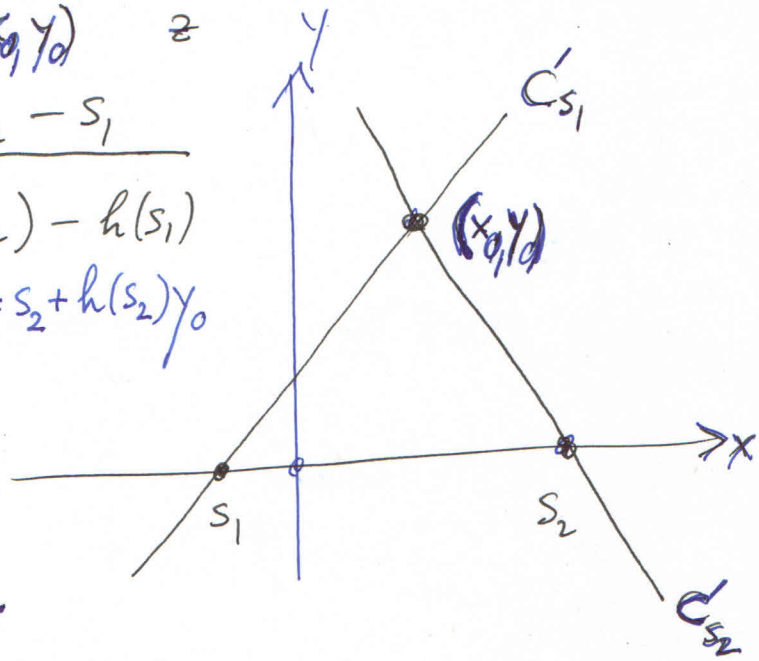
Ker je $$\begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + t\, h'(s) & h(s) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{t=0} = 1,$$

je sistem rešljiv na $s = s(x,y)$, $t = y$. v vsaki točki $(s, 0)$.

<u>Singularnosti</u> <u>rešitve</u> u: $C_s' = \{x = s + h(s)y\} \subset \mathbb{R}^2$

Karakteristiki C_{s_1} in C_{s_2} za $s_1 \neq s_2$ se sekata v točki (x_0, y_0) z

$$\begin{cases} y_0 = -\dfrac{s_2 - s_1}{h(s_2) - h(s_1)} \\ x_0 = s_1 + h(s_1)y_0 = s_2 + h(s_2)y_0 \end{cases}$$



Denimo, da je

$h(s_1) \neq h(s_2)$;

potem je $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(Če je $h'(s) < 0$, je $y_0 > 0$.)

Na C_{s_j}' ima u konstantno vrednost $h(s_j)$.

Odtod vidimo, da "rešitev" u ne more biti dobro definirana v točki (x_0, y_0); to je, rešitev $u(x,y)$ ima <u>singularnost</u>, preden doseže točko (x_0, y_0).

Linearna PDE (1.1):

$$a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y = c(x,y)\,u + d(x,y) \qquad (2.2)$$

$$V = (a,\ b,\ cu+d) \quad \text{karakt. polje:}$$

Enačba karakteristik:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x,y) \\ \dot{y} = b(x,y) \\ \dot{z} = c(x,y)\,z + d(x,y) \end{cases}$$

Prvi dve enačbi ne vključujeta z in jih lahko zapišemo v obliki

$$(2.3) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \quad \ldots \text{ navadna d.e. za } y = y(x).$$

Tretja enačba za $\dot{z}$ je linearna v z, torej je vsaj (globalno) rešljiva, kjer je def. rešitev prvih dveh enačb, oz. enačbe (2.3).

Opomba: Enačba (2.3) definira sistem krivulj v $\mathbb{R}^2$, ki se imenujejo karakteristične projekcije. To so ravno projekcije na $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ karakterističnih krivulj v $\mathbb{R}^3$.

PRIMER 4 Reši enačbo $-y u_x + x u_y = u$

z začetnim pogojem $u(x,0) = \varphi(x)$.

Rešitev. Karakteristična enačba:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = z \end{cases} \qquad \text{začetni pogoj: } \begin{array}{l} x(s,0) = s \\ y(s,0) = 0 \\ z(s,0) = \varphi(s) \end{array}$$

Rešitev karakteristične enačbe:

$$\begin{cases} x(s,t) = f_1(s)\cos t + f_2(s)\sin t \\ y(s,t) = f_1(s)\sin t - f_2(s)\cos t \\ z(s,t) = e^t \cdot \varphi(s) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(s,0) = f_1(s) = s \\ y(s,0) = -f_2(s) = 0 \end{array}\right\} \text{ začetni pogoj.}$$

$\Rightarrow$ Integralna ploskev $\begin{cases} x(s,t) = s\cos t \\ y(s,t) = s\cdot\sin t \\ z(s,t) = e^t\varphi(s) \end{cases}$

Iz prvih dveh enačb sledi

$$s = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$t = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Torej: $z = u(x,y) = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$.

II.3. PRVI INTEGRALI KARAKTERISTIČNEGA SISTEMA

Naj bo $V = (a, b, c)$ karakteristično polje (2), priredjeno PDE (1).

Funkcija $\phi(x, y, z)$ se imenuje <u>prvi integral</u> polja V, če je ϕ konstantna vzdolž vsake tokovnice polja V.

Vsaka tokovnica $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ zadošča sistemu NDE:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y, z) \\ \dot{y} = b(x, y, z) \\ \dot{z} = c(x, y, z) \end{cases}$$

Torej je ϕ 1. integral natanko tedaj, ko velja:

$$0 = \frac{d}{dt}\phi(x(t), y(t), z(t)) = \phi_x \cdot \dot{x} + \phi_y \cdot \dot{y} + \phi_z \cdot \dot{z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = a\,\phi_x + b \cdot \phi_y + c\,\phi_z .$$

Vsaka nivojna ploskev $\{\phi = \text{konstanta}\}$ prvega integrala je unija karakteristik, torej je integralna ploskev enačbe (1.1), če jo lahko izrazimo v obliki $z = u(x, y)$.

Lokalno (v okolici poljubne točke (x_0, y_0, z_0)) obstajata dva neodvisna 1. integrala ϕ_1, ϕ_2 in vsak drug 1. integral je oblike $\Psi(\phi_1, \phi_2) = \phi$.

Torej dobimo splošno rešitev PDE (1) takole:

- poiščemo dva neodvisna integrala ϕ_1, ϕ_2 karakterističnega sistema
- ~~Na splošno rešitev~~ Zapišemo poljuben integral $\Psi(\phi_1, \phi_2) = 0$ ter rešimo na $z = u(x,y)$ (če je mogoče).

Partikularno rešitev dobimo iz Cauchyevega problema.

<u>PRIMER 5</u>: $-yu_x + xu_y = u$ (primer 4).

Karakteristični sistem:

$$\dot{x} = -y \qquad \dot{y} = x \qquad \dot{z} = z$$

1.+2. enačba: $x\dot{x} + y\dot{y} = x(-y) + yx = 0$

$$\Longrightarrow \phi_1 = x^2 + y^2 \text{ je integral.}$$

$$\frac{\dot{z}}{z} = 1 = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2+y^2} = \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]^{\cdot}$$

$$\log z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C \quad \dots \text{ integral}$$

$$z = C \cdot e^{\operatorname{arctg} y/x}$$

<u>Splošni 1. integral</u>: $\boxed{z = C(x^2+y^2)\cdot e^{\operatorname{arctg} y/x}}$

PRIMER 6. $x u_x + y u_y = x^2 + y^2$

Karakteristični sistem:

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y, \quad \dot{z} = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{x}}{x} - \frac{\dot{y}}{y} = 0; \quad x\dot{x} + y\dot{y} - \dot{z} = 0$$

$$\left(\log \frac{x}{y}\right)^{\cdot} = 0; \quad \left(x^2 + y^2 - 2z\right)^{\cdot} = 0$$

$$\phi_1 = \frac{y}{x}; \quad \phi_2 = x^2 + y^2 - 2z.$$ 1. integrala.

Splošna rešitev:

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 - 2z\right) = 0.$$

V točkah, kjer lahko rešimo to enačbo na 2. spremenljivko, dobimo

$$x^2 + y^2 - 2z = \text{funkcija}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

f določimo iz začetnega (Cauchyevega) pogoja.