VII. ELIPTIČNE PDE

VII.1 Laplaceov operator in harmonične funkcije.

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad \text{na } \mathbb{R}^n \qquad (1.1)$$

$$\begin{cases} \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{na } \mathbb{R}^2: \\ \\ \Delta u = u_{xx} + u_{yy}. \end{cases} \qquad (1.2)$$

V razdelku III.5 smo dokazali, da lahko vsak linearen eliptičen parcialen dif. operator 2. reda v 2 spremenljivkah, z realno analitičnimi koeficienti, spremenimo z lokalno realno analitično zamenjavo koordinat v operator oblike

$$Lu = \Delta u + l(u),$$

kjer je $l(u)$ P.D.O. prvega reda.

<u>Definicija</u>. Enačba $\Delta u = 0$ (1.3)

se imenuje <u>Laplaceova enačba</u>; njene rešitve se imenujejo <u>harmonične funkcije</u>.

Enačba $\Delta u = f$ (1.4)

je <u>nehomogena Laplaceova enačba</u> oz. <u>Poissonova enačba</u>.

Opomba. S pomočjo klasičnih operatorjev

$$\vec{\nabla} = \text{gradient}$$

$$\text{div} = \vec{\nabla}\cdot \quad \text{divergenca}$$

lahko zapišemo Laplaceov operator v obliki

$$\Delta = \text{div}(\vec{\nabla}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} \quad \text{na } \mathbb{R}^n.$$

Torej:
$$\begin{aligned}\Delta u &= \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} u)\\ &= \vec{\nabla}\cdot(u_{x_1}, \dots, u_{x_n})\\ &= \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}.\end{aligned}$$

Pomemben razred funkcij so tudi subharmonične fn:

Definicija: Funkcija $u \in C^2(D)$ je subharmonična, če je

$$\Delta u \geq 0 \quad \text{na } D.$$

Opomba: V eni spremenljivki je $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$; torej je $u(x)$ harmonična $\Leftrightarrow$ u linearna

$u(x)$ subharmonična $\Leftrightarrow$ u konveksna.

Najbolj tipična robna pogoja pri Laplaceovi oz. Poissonovi enačbi sta:

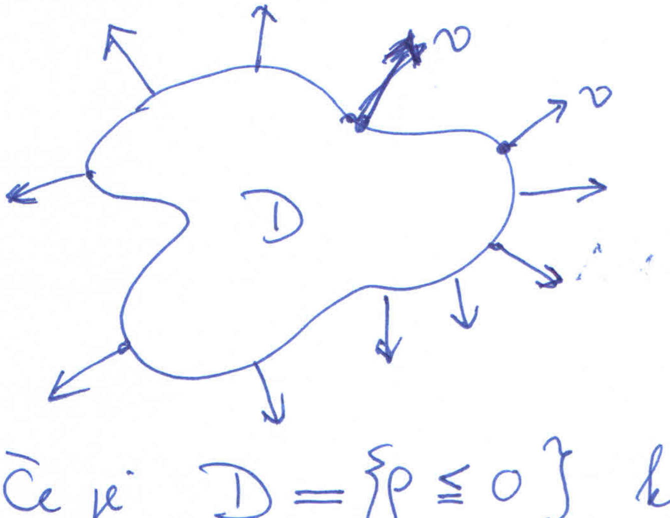
<u>Dirichletov pogoj</u> (oz. <u>Dirichletov problem</u>)

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{na domeni } D \subset \mathbb{R}^n \\ u|_{\partial D} = g & \text{(predpisana vrednost rešitve na robu)} \end{cases} \qquad (1.5)$$

<u>Neumannov pogoj</u> (oz. <u>Neumannov problem</u>):

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{na } D \subset \mathbb{R}^n; \\ \partial_n u = g & \text{na } \partial D \end{cases} \quad (f, g \text{ dani funkciji}) \qquad (1.6)$$

Tu je $\partial_n u$ <u>normalni</u> <u>odvod</u> u na robu, torej odvod v smeri enotne zunanje normale ν:



$$\partial_n u = \nabla u \cdot \nu$$

Če je $D = \{\rho \leq 0\}$, kjer je ρ gladka funkcija na okolici D in $\nabla \rho \neq 0$ na $\partial D = \{\rho = 0\}$, je $\nu = \frac{\nabla \rho}{\|\nabla \rho\|}$ enotna zunanja normala.

Obravnavamo lahko tudi kombinacijo teh dveh robnih pogojev:

$$u + \alpha \cdot \partial_n u = g \quad \text{na } \partial D. \qquad (1.7)$$

Tu so g ter α znane funkcije na ∂D.
To je robni problem 3. vrste za Poissonovo enačbo.

VII.2. Zveza med harmoničnimi funkcijami ter holomorfnimi funkcijami na domenah v $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ odprta domena v $\mathbb{C} = \{z = x+iy;\ x,y \in \mathbb{R}\}$.
Funkcija $f: D \to \mathbb{C}$ se imenuje holomorfna, če ima v vsaki točki $z_0 \in D$ kompleksni odvod:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Iz tega pogoja sledi

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|) \qquad (2.2)$$

kjer je $\lim_{z \to z_0} \frac{o(|z-z_0|)}{|z-z_0|} = 0$.

Velja tudi obratno: iz (2.2) sledi (2.1).

Torej je f v točki z_0 kompleksno odvedljiva (to je, obstaja njen kompleksen odvod $f'(z_0)$ (2.1)) natanko tedaj, ko je diferenciabilna in ko je njen diferencial enak

$$df_{z_0}\cdot(h+ik) = f'(z_0)\cdot(h+ik). \qquad (2.3)$$

$=$ produkt vektorja $h+ik\in\mathbb{C}$ s številom $f'(z_0)\in\mathbb{C}$.

Diferencial lahko zapišemo v naslednji obliki:

$$df_{z_0}\cdot\underset{(h,k)}{\underset{\shortparallel}{(h+ik)}} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\cdot k$$

$$= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\cdot(h+ik) + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\cdot(h-ik) \qquad (2.4)$$

kjer sta $\frac{\partial}{\partial z}$ in $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ kompleksna parcialna dif. operatorja:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

Iz primerjave (2.3) in (2.4) sledi, da je f v točki z_0 kompleksno odvedljiva natanko tedaj, ko je

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = 0 .$$

Odtod sledi:

TRDITEV. Funkcija $f: D \to \mathbb{C}$ na domeni $D \subset \mathbb{C}$ je holomorfna natanko tedaj, ko je diferenciabilna in zadošča homogeni Cauchy–Riemannovi enačbi:

$$2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0 \quad \text{na } D. \qquad (2.6)$$

Če zapišemo f v obliki $f = u + iv$, preprost račun pokaže naslednje:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = (u_x + i v_x) + i (u_y + i v_y)$$
$$= (u_x - v_y) + i (u_y + v_x).$$

Torej:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right\} \quad \text{CR-sistem} \quad (2.7)$$

Iz splošne teorije holomorfnih funkcij sledi, da jih lahko lokalno v okolici vsake točke $z_0 \in D$ predstavimo v obliki konvergentne potenčne vrste:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Vrsta konvergira (vsaj) na največjem krogu $K(z_0, r) \subset D$. Torej je $f \in C^\infty(D)$.

Torej sta realni in imaginarni del holomorfne funkcije

$$u = \operatorname{Re} f \quad , \quad v = \operatorname{Im} f$$

gladki funkciji.

Iz CR-sistema (2.7) dobimo:

$$u_{xx} = v_{yx} \ ; \ u_{yy} = -v_{yx} \Longrightarrow \Delta u = 0$$

$$u_{xy} = v_{yy} \ ; \ -u_{yx} = v_{xx} \Longrightarrow \Delta v = 0.$$

Torej smo dokazali:

<u>Trditev</u>: Če je $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, sta u in v harmonični funkciji.

<u>PRIMERI</u>:

1° $$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{matrix} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{matrix}\right\} \text{harmonični}$$

2° f holomorfna funkcija brez ničel

$$\log f = \log|f| + i \arg f$$

Torej sta $\log|f|$ in $\arg f$ harmonični funkciji.

VII. 8

V obratni smeri imamo naslednji izrek.

<u>IZREK</u>. Če je $u : D \to \mathbb{R}$ C^2 harmonična funkcija na enostavno povezani domeni $D \subset \mathbb{C}$, potem obstaja harmonična funkcija $v : D \to \mathbb{R}$, tako da je $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ holomorfna.

<u>Dokaz</u>. Oglejmo si vektorsko polje

Hamiltonovo polje H_u.

$$V = (-u_y, u_x, 0), \quad (x,y) \in D,$$

na $D \cong D \times \{0\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Njegov rotor je enak

$$\operatorname{rot} V = \vec{\nabla} \times V = (u_{xx} + u_{yy}) \cdot \vec{k}$$
$$= (0, 0, \Delta u) = 0.$$

Odtod sledi, da je

$$V = \vec{\nabla} v$$

za neko funkcijo $v : D \to \mathbb{R}$, ki jo dobimo z integriranjem:

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} V \cdot d\vec{s}$$

($(x_0, y_0) \in D$ poljubna začetna točka.)

Torej velja
$$\begin{cases} v_x = V_1 = -u_y \\ v_y = V_2 = u_x \end{cases}$$

in v zadošča CR sistemu (2.7).

<u>Opomba</u>: Vektorsko polje $V = -u_y \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial y} = H_u$ se imenuje <u>Hamiltonovo polje</u> pridruženo u. Velja $V \cdot \vec{\nabla} u = 0$; njegov tok leži v nivojnicah funkcije u.

OPOMBA.

Isti račun lahko naredimo z diferencialnimi formami (namesto z vektorskimi polji) takole.

Vpeljemo konjugirani diferencial funkcije u:

$$d^c u \stackrel{\text{def}}{=} -u_y \cdot dx + u_x \cdot dy. \qquad (2.8)$$

(Iz sistema (2.7) vidimo: če je $f = u + iv$ holomorfna, je $d^c u = dv$.) Velja:

$$\begin{aligned} d\,d^c u &= d(-u_y\,dx + u_x\,dy) \\ &= -du_y \wedge dx + du_x \wedge dy \\ &= -(u_{yx}\,dx + u_{yy}\,dy) \wedge dx + (u_{xx}\,dx + u_{xy}\,dy) \wedge dy \\ &= -u_{yy}\,dy \wedge dx + u_{xx}\,dx \wedge dy \end{aligned}$$

$$\boxed{d\,d^c u = \Delta u \cdot dx \wedge dy\,.} \qquad (2.9)$$

Torej:
$$d d^c u = 0 \iff \Delta u = 0.$$

Recimo, da to velja. Tedaj je $d(d^c u) = 0$, torej je $d^c u$ sklenjena 1-forma na D. Če je D enostavno povezana, je integral

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} d^c u$$

neodvisen od izbire poti od dane ~~začetne~~ točke $(x_0,y_0) \in D$ do variabilne končne točke $(x,y) \in D$. Očitno je $dv = d^c u$, torej je $u + iv : D \to \mathbb{C}$ holomorfna.

Laplaceov operator lahko izrazimo tudi s pomočjo operatorjev $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ (2.5):

$$4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \, \partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= u_{xx} - i u_{xy} + i u_{yx} + u_{yy}$$

$$\boxed{4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \, \partial \bar{z}} = \Delta u \, .} \qquad (2.10)$$

Trditev: Če je u harmonična na domeni $D \subset \mathbb{C}$ in je $f: D' \to D$ holomorfna, je kompozicija $u \circ f$ harmonična na $D' \subset \mathbb{C}$.

Dokaz: Izberimo točko $a \in D'$ in število $r > 0$, tako da je $K(f(a), r) = \{z : |z - f(a)| < r\} \subset D$. Na tem krogu ima u harmonično konjugiranko v, tako da je $g = u + iv$ holomorfna (Izrek, str. VII.8).

Zato je $g \circ f$ holomorfna na neki okolici točke a v D'. Ker je $u \circ f = \mathrm{Re}(g \circ f)$, je $u \circ f$ harmonična (Trditev, str. $\overline{\underline{VII}}.7$).

Opomba. Trditev lahko dokažemo tudi z uporabo verižnega pravila ter formule (2.10):

$$\frac{\partial (u\circ f)}{\partial \bar z} = \frac{\partial u}{\partial w}(f(z))\cdot \underbrace{\frac{\partial f(z)}{\partial \bar z}}_{=0} + \frac{\partial u}{\partial \bar w}(f(z))\cdot \frac{\partial \overline{f(z)}}{\partial \bar z}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial \bar w}(f(z))\cdot \overline{f'(z)} \,. \qquad \left(\text{ker je } \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \overline{f'}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar z}(u\circ f) = \frac{\partial^2 u}{\partial w\,\partial \bar w}(f(z))\cdot \frac{\partial f(z)}{\partial z}\cdot \overline{f'(z)} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar w\,\partial \bar w}(f(z))\cdot \frac{\partial \overline{f(z)}}{\partial z}\cdot \overline{f'(z)}\,.$$

V drugem členu je $\frac{\partial \overline{f(z)}}{\partial z} = 0$ in člen odpade.

V prvem členu je $\frac{\partial f(z)}{\partial z} = f'(z)$. Torej:

$$\Delta (u\circ f)(z) = 4\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar z}(u\circ f)(z) = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial w\,\partial \bar w}(f(z))\cdot |f'(z)|^2$$

$$\boxed{\Delta(u\circ f)(z) = (\Delta u)(f(z))\cdot |f'(z)|^2.} \qquad (2.11)$$

Iz $\Delta u = 0$ zato sledi $\Delta(u\circ f) = 0$, če je f holomorfna.

Definicija: Funkcija $u : D \to \mathbb{R}$ razreda C^2 se imenuje

- subharmonična, če je $\Delta u \geq 0$ na D;
- strogo subharmonična, če $\Delta u > 0$ na D.

Primer: $\Delta(|z|^2) = \Delta(x^2+y^2) = 4 > 0$,
torej je $|z|^2$ ~~so~~ strogo subharmonična.

Splošneje, če je $f(z)$ holomorfna, je $|f|^2$ subharmonična:

$$\Delta(|f|^2) = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(f \cdot \bar{f}) = 4 \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

$$= 4 \cdot |f'(z)|^2 \geq 0 \qquad \left(\text{ker je } \frac{\partial f}{\partial z} = f', \ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{f'}\right)$$

in je strogo subharmonična na množici $\{z : f'(z) \neq 0\}$.

Trditev. Če je u subharmonična in f holomorfna, je $u \circ f$ subharmonična.

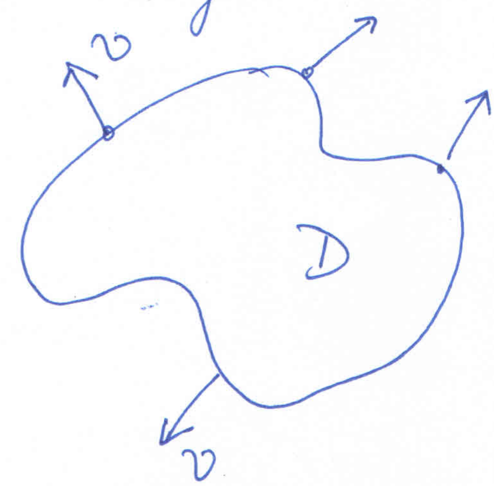
- Če je poleg tega u strogo subharmonična in $f' \neq 0$, je $u \circ f$ strogo subharmonična.

Dokaz sledi iz $\Delta(u \circ f) = [(\Delta u) \circ f] \cdot |f'|^2$ (glej (2.11)).

VII.3. Izrek o povprečni vrednosti harmonične funkcije.

Potrebovali bomo Gaussovo formulo (poseben primer Stokesovega izreka); imenovano tudi divergenčna formula.

IZREK (Gauss): Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ omejeno območje z odsekoma C^1 robom in $\vec{\nu}$ enotna zunanja normala na ∂D. Za vsako vektorsko polje $\vec{F}=(F_1,\dots,F_n)$ razreda C^1 na $\bar{D}$ velja:



$$\int_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\cdot dS = \int_D \operatorname{div}\vec{F}\cdot dV$$

$$= \int_D \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\right)\cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n . \qquad (3.1)$$

Poseben primer za $n=2$ se imenuje Greenova formula:

$$(3.2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy & \text{(cirkulacija)} \\ \displaystyle\int_{\partial D} -Q\cdot dx + P\cdot dy = \iint_D (P_x + Q_y)\,dx\,dy = \iint_D \operatorname{div}(P,Q)\,dx\,dy & \text{(fluks)} \end{cases}$$

Integral na levi v (3.1) ustreza drugemu integralu v (3.2), ki predstavlja pretok (fluks) polja $F=(P,Q)$ skozi ∂D v smeri polja $\vec{\nu}$ = zunanja normala na ∂D.

Posledica. Za vsako funkcijo $u \in C^2(\bar{D})$ velja

$$\int_{\partial D} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu}\, dS = \int_D \Delta u \cdot dV . \qquad (3.2)$$

Dokaz. Ker je $\operatorname{div}(\vec{\nabla} u) = \Delta u$ (str. VII.2), sledi formula neposredno iz (3.1).

Če je u harmonična na $\bar{D}$, tedaj dobimo

$$\int_{\partial D} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu}\, dS = 0 . \qquad (3.3)$$

(Izrek o povprečni vrednosti)

IZREK. Naj bo $u : D \to \mathbb{R}$ harmonična fn. na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$. Za vsako točko $a \in D$ in kroglo $\overline{K(a;R)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| \leq R\} \subset D$ velja:

$$u(a) = \frac{1}{\sigma \cdot R^{n-1}} \cdot \int_{|x-a|=R} u(x) \cdot dS \qquad (3.4)$$

$$= \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{|y|=1} u(a + R \cdot y) \cdot dS_{(y)}$$

kjer je σ površina sfere $\{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\} = S^{n-1}$.

OPOMBA. Izraz na desni v (3.4) je ravno povprečna vrednost funkcije u na sferi $\{|x-a| = R\}$.

Dokaz. Naj bo $r \in [0, R]$. Definiramo funkcijo

$$V(r) = \frac{1}{\sigma} \int_{|y|=1} u(a+ry) \cdot dS(y) \ .$$

Število $V(r)$ je povprečje u po sferi $\{|x-a| = r\}$ radija r.

Odvajamo po r:

$$\sigma \cdot V'(r) = \frac{\partial}{\partial r} \int_{|y|=1} u(a+ry) \cdot dS(y)$$

$$= \int_{|y|=1} \vec{\nabla} u\,(a+ry) \cdot y \cdot d\mathbf{S}(y)$$

$$\overset{(3.3)}{=} r \cdot \int_{|y|\leq 1} (\Delta u)\,(a+ry) \cdot dV(y) \qquad (3.5)$$

Upoštevali smo, da je y enotna zunanja normala na sfero $\{|y| = 1\}$ ter uporabili formulo (3.3).

Če je $\Delta u = 0$, sledi odtod

$$V'(r) = 0, \qquad 0 \leq r \leq R,$$

torej je $V(r)$ konstantna. Ker je $V(0) = u(a)$, trditev sledi.

OPOMBA 1: V dimenziji $n=2$ sledi formula tudi iz Cauchyeve formule za holomorfne funkcije:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{z-a} \cdot dz$$

Če parametriziramo krožnico v obliki $z = a + Re^{i\theta}$, dobimo:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta}}{Re^{i\theta}} \cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta}) \cdot d\theta$$ = povprečna vrednost f na krožnici $\{|z-a|=R\}$.

Če je $f = u + iv$, sledi

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a+Re^{i\theta}) \cdot d\theta . \qquad (3.6)$$

OPOMBA 2. Če je u subharmonična, $\Delta u \geq 0$, sledi iz (3.5), da je $V'(r) \geq 0$, torej je V naraščajoča. Zato velja:

$$u(a) \leq \frac{1}{\sigma} \int_{|y|=1} u(a + R \cdot y) \, dS(y) \qquad (3.7)$$

Torej subharmonična funkcija zadošča lastnosti podpovprečne vrednosti. Če je $\Delta u > 0$, velja v (3.7) strogi neenačaj za $\forall R > 0$.

Izrek o povprečni vrednosti ima tudi naslednji obrat:

IZREK. Naj bo $u : D \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ funkcija ki v vsaki točki $a \in D$ zadošča lastnosti povprečne vrednosti:

$$u(a) = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{|y|=1} u(a + ry) \cdot dS(y)$$

za $0 < r \leqq r_a$ in za nek $r_a > 0$.

Potem je u harmonična.

Dokaz. Recimo, da u ni harmonična, torej $\Delta u(a) \neq 0$ v neki točki $a \in D$. Lahko vzamemo, da je $\Delta u(a) > 0$ (po potrebi nadomestimo u z $-u$).

Tedaj velja v (3.7) strogi neenačaj za vsak dovolj majhen $r > 0$; torej u ne zadošča lastnosti povprečne vrednosti.

OPOMBA. Izrek velja tudi pod šibkejšo predpostavko, da je $u \in \mathcal{C}(D)$ samo zvezna. Dokaz je težji, potrebujemo rešitev Dirichletovega problema za harmonične funkcije (glej razdelek VII. 6 v nadaljevanju).

VII.4. PRINCIP MAKSIMUMA IN MINIMUMA ZA HARMONIČNE FN.

Kot posledica izreka o (pod)povprečni vrednosti lahko dokažemo naslednji princip maksimuma (in min.).

IZREK. Če ima harmonična funkcija $u : D \to \mathbb{R}$ šibki lokalni ekstrem (maks. ali min.) v neki točki $a \in D$, potem je u konstantna na neki krogli $K(a, R) \subset D$.

Dokaz. Izberimo $R > 0$ ~~tako~~, da je
$$u(a) \geqq u(x), \quad \forall x \in K(a; R). \qquad (3.8)$$
Izberimo poljuben $r \in (0, R]$. Po izreku na str. VII.14 je $u(a)$ enaka povprečni vrednosti u na sferi $S_r = \{x : |x - a| = r\}$. Ker je $u \leq u(a)$ na S_r po (3.8), je to mogoče le v primeru, da je $u \equiv u(a)$ na S_r. Ker to velja za $\forall r \in (0, R]$, sledi, da je u konstantna na $K(a; R)$.

Enako dokažemo rezultat za lokalni minimum, ali pa uporabimo že dokazani rezultat za funkcijo $-u$ (ki je tudi harmonična).

~~Analogen argument, če je u šibko~~

Za subharmonične funkcije enak argument pokaže:

IZREK • Če ima subharmonična funkcija u šibki lokalni maksimum v neki točki $a \in D$, potem je u konstantna na neki okolici a.

• Strogo subharmonična funkcija nima nobenega lokalnega maksimuma.

Dokaz: Prvo trditev dokažemo enako kot za harmonične funkcije.

Če je a lokalni maksimum u, velja:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(a) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(a) \leq 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Torej je $\Delta u(a) \leq 0$, zato u ne more biti strogo subharmonična.

POSLEDICA. Če je u zvezna na omejenem zaprtem območju $\overline{D} \subset \mathbb{R}^n$ in harmonična na D, potem doseže u maksimum in minimum na ∂D.

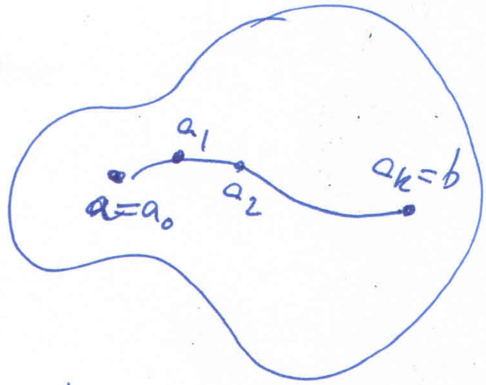
Če je u subharmonična na D in zvezna na $\overline{D}$, doseže maksimum na ∂D.

PRIMER: $u(x,y) = x^2 + y^2$ je strogo subharmonična ($\Delta u = 4$) in ima strogi minimum pri $(x,y) = (0,0)$.

IZREK (Krepki princip maksimuma).

Če harmonična funkcija $u : D \to \mathbb{R}$ na povezani domeni D doseže globalni ekstrem v neki notranji točki, potem je u konstantna.

Dokaz. Naj bo $M = \sup_D u$ in $u(a) = M$ za neko točko $a \in D$. Naj bo $b \in D$ poljubna točka in γ neka pot od a do b. Izberemo zaporedje točk $a = a_0, a_1, \dots, a_k = b$ na γ, tako da obstajajo radiji $r_j > 0$ $(j = 0, \dots, k)$,



da je

$$a_{j+1} \in K(a_j; r_j) \subset D; \quad j = 1, \dots k.$$

Ker doseže u maksimum M v $a = a_0$, sledi iz izreka na str. VII.19 (ter dokaza), da je $u \equiv M$ na krogu $K(a_0, r_0)$.

Ker je $a_1 \in K(a_0, r_0)$, je $u(a_1) = M$. Ponovimo isti sklep na krogu $K(a_1, r_1)$ (u je konstanta).

Po k korakih vidimo $u(b) = M$.

Ker je bila $b \in D$ poljubna, je $u \equiv M$ na D.

S pomočjo principa maksimuma dobimo enoličnost rešitve Dirichletovega problema:

IZREK. Naj bo D omejeno zaprto območje v $\mathbb{R}^n$. Dirichletov problem

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{na } \mathring{D} \\ u|_{\partial D} = g \end{cases}$$

ima največ eno rešitev $u \in C(D) \cap C^2(\mathring{D})$.

Dokaz. Če sta u_1 in u_2 dve rešitvi, je

$u = u_1 - u_2$ zvezna funkcija na D,

ki je harmonična na $\mathring{D}$ ter $u = 0$ na ∂D.

Iz principa maksimuma sledi $u \equiv 0$ na D.

PRIMER. Izrek v splošnem ne velja na neomejenih območjih.

npr: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$ komplement enotnega kroga

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u = 0 & \text{na } \{x^2+y^2=1\} = \partial D \end{cases}$$

ima rešitve $u_1 \equiv 0$ in

$$u_2(x,y) = \ln(x^2+y^2) = \ln |z^2|$$

VII.5. Greenove identitete in enoličnost rešitev robnih problemov za Laplaceov operator

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ omejeno območje z odsekoma C^1 robom.

Osnovna (prva) Greenova id. je Gaussova formula (3.1):

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, dS = \int_D \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV \qquad (5.1)$$

ki velja za poljubno vektorsko polje razreda $C^1(\overline{D})$.

Če je $\vec{F} = \vec{\nabla} u$, $u \in C^2(\overline{D})$, dobimo odtod

$$\int_{\partial D} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu}\, dS = \int_{\partial D} \partial_n u \cdot dS = \int_D \Delta u \cdot dV. \qquad (5.2)$$

Če vzamemo $\vec{F} = v \cdot \vec{\nabla} u$, $u, v \in C^2(\overline{D})$, dobimo 2. Greenovo id.

$$\int_{\partial D} v\, \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu}\, dS = \int_{\partial D} v \cdot \partial_n u \cdot dS = \int_D \operatorname{div}(v \cdot \vec{\nabla} u) \cdot dV$$

$$= \int_D \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \cdot dV + \int_D v \cdot \Delta u \cdot dV \qquad (5.3)$$

Če v formuli (5.3) zamenjamo u in v ter dobljeno identiteto odštejemo od (5.3), dobimo 3. Greenovo id.:

$$\int_{\partial D} (v\, \partial_n u - u \cdot \partial_n v) \cdot dS = \int_D (v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v) \cdot dV \qquad (5.4)$$

S pomočjo teh identitet zlahka izpeljemo ~~…~~ izreke o enoličnosti rešitev različnih robnih problemov:

- Dirichletov: $\begin{cases} \Delta u = f & \text{na } D \\ u = g & \text{na } \partial D \end{cases}$ (f zvezna funkcija na D),
- Neumannov: $\begin{cases} \Delta u = f & \text{na } D \\ \partial_n u = g & \text{na } \partial D \end{cases}$ (α, g zvezni funkciji na ∂D)
- splošni (3. vrste): $\begin{cases} \Delta u = f & \text{na } D \\ u + \alpha \cdot \partial_n u = g & \text{na } \partial D \end{cases}$

IZREK. Naj bo D omejena domena z odsekoma gladkim (C^1) robom ∂D v $\mathbb{R}^n$ (D povezana).

(i) Dirichletov problem ima največ eno rešitev.

(ii) Če je $\alpha \geq 0$, ima problem 3. vrste največ eno rešitev.

(iii) Če je u rešitev Neumannovega problema, potem je vsaka druga rešitev oblike $v = u + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Točka (i) je poseben primer (ii); dokazali smo jo že ~~kot~~ posledico principa maksimuma.

Dokaz (ii). Recimo, da sta u_1, u_2 rešitvi problema 3. vrste. Njuna razlika $v = u_1 - u_2$ zadošča:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{na } D \\ v + \alpha \cdot \partial_n v = 0 & \text{na } \partial D. \end{cases}$$

Vstavimo $u = v$ v 2. Greenovo identiteto (5.3):

$$\int_{\partial D} v \cdot \vec{\nabla} v \cdot \vec{n}\, dS = \int_{\partial D} v \cdot \partial_n v \cdot dS$$

$$= \int_D |\vec{\nabla} v|^2 \cdot dV.$$

Iz robnega pogoja $v + \alpha \partial_n v = 0$ sledi

$$v = -\alpha \cdot \partial_n v.$$

Torej $\displaystyle\int_{\partial D} v \cdot \partial_n v \cdot dS = -\int_{\partial D} \alpha \cdot |\partial_n v|^2 \cdot dS = + \int |\vec{\nabla} v|^2 \cdot dV.$

Ker je $\alpha \geq 0$ in sta $|\partial_n v| \geq 0$, $|\vec{\nabla} v| \geq 0$, sledi, da sta oba integrala enaka 0. Iz $\vec{\nabla} v = 0$ vidimo, da je v konstanta; zato je $\partial_n v = 0$ na ∂D. Iz robnega pogoja sledi $v = -\alpha \cdot \partial_n v = 0$ na ∂D, torej je $v = 0$ in zato $u_1 = u_2$.

Dokaz (iii). Naj bosta u_1, u_2 rešitvi Neumannovega problema. Njuna razlika $v = u_1 - u_2$

zadošča
$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{na } D \\ \partial_n v = 0 & \text{na } \partial D \end{cases}.$$

Iz identitete (5.3) (z $u = v$) dobimo sedaj

$$\int_D |\vec{\nabla} v|^2 \cdot dV = 0.$$

(Ostala dva člena sta enaka 0 zaradi $\Delta v = 0$, $\partial_n v = 0$).
Torej je v konstanta. Očitno je za vsako rešitev u tudi $u + c$ rešitev, torej je družina rešitev bodisi <u>prazna, bodisi enoparametrična</u>.

Direktno iz prve Greenove formule (5.2) dobimo tudi potrebni pogoj za obstoj rešitev Neumannovega prob.:

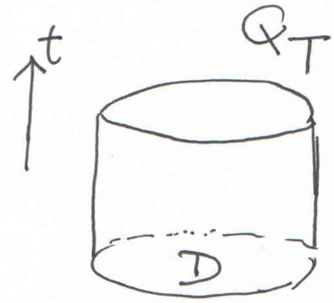
<u>TRDITEV.</u> Če ima Neumannov problem
$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{na } D \\ \partial_n u = g & \text{na } \partial D \end{cases}$$
rešitev, potem velja
$$\int_{\partial D} g \cdot dS = \int_D f \cdot dV$$

<u>Dokaz.</u>
$$\int_{\partial D} g \cdot dS = \int_{\partial D} \partial_n u \cdot dS = \int_{\partial D} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu} \cdot dS$$
$$= \int_D \Delta u \cdot dV = \int_D f \cdot dV.$$

VII. 6. Princip maksimuma za toplotno enačbo.

$$u_t = k \cdot \Delta u \qquad \text{na omejeni domeni } D \subset \mathbb{R}^n,$$
$$t \geqq 0; \quad k > 0 \text{ konstanta.}$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \text{ . Laplaceov operator na } \mathbb{R}^n.$$



Fiksiramo $T > 0$ in definiramo

$$Q_T = D \times [0, T] \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$

$$\partial_p Q_T = (D \times \{0\}) \cup (\partial D \times [0, T]).$$

Opomba: $\partial Q_T = \underbrace{\partial_p Q_T}_{\text{spodnja ploskev in plašč}} \cup \underbrace{(D \times \{T\})}_{\text{zgornja ploskev}}$.

IZREK. Vsaka rešitev toplotne enačbe $u_t = k \cdot \Delta u$ na domeni Q_T doseže maksimum in minimum na $\partial_p Q_T$.

Dokaz. Izberimo $\varepsilon > 0$ in def.

$$v(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t.$$

Tedaj je

$$v_t = u_t - \varepsilon = k \cdot \Delta u - \varepsilon = k \cdot \Delta v - \varepsilon, \text{ torej}$$

$$v_t - k \cdot \Delta v = -\varepsilon < 0. \qquad (6.1)$$

Recimo, da v doseže ~~maksimum~~ lokalni maksimum v neki točki $q = (x_0, t_0) \in Q_T$.

Če je q notranja točka domene Q_T, velja

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{\partial v}{\partial t}(q) = 0, & \frac{\partial v}{\partial x_j}(q) = 0 \\ & \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(q) \leqq 0\end{array}\right\} \quad j = 1, \dots, n$$

Torej je $\frac{\partial v}{\partial t}(q) = 0$ in $\Delta v(q) \leqq 0$, zato

$$v_t(q) - k \cdot \Delta v(q) \geqq 0,$$ protislovje s (6.1).

Zato doseže v maksimum le v neki robni točki $q \in \partial Q_T$. Če je $q \in D \times \{T\}$, sledi

$v_t(q) \geq 0$ in zato iz (6.1)

$$k \cdot \Delta v(q) = v_t(q) + \varepsilon \geqq \varepsilon > 0.$$

To je v protislovju s predpostavko, da ima funkcija $x \longmapsto v(x, T)$ lokalni maksimum v x_0 (kjer je $q = (x_0, T)$).

Torej je maks. lahko dosežen le na $\partial_p Q_T$.

Z limitnim prehodom $\varepsilon \downarrow 0$ sledi isto za

$$u = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (u - \varepsilon t) .$$

POSLEDICA. Naj bosta u_1 in u_2 rešitvi enačbe

$$u_t - k\cdot\Delta u = f \qquad \text{na } D\times[0,T] = Q_T$$

z robnim pogojem

$$u_i = g_i \qquad \text{na } \partial D\times[0,T];\ i=1,2$$

in začetnim pogojem

$$u_i = h_i \qquad \text{na } D\times\{0\};\quad i=1,2.$$

Potem velja (6.2)

$$\max_{Q_T}|u_1-u_2| \leq \max_{\partial D\times[0,T]}|g_1-g_2| + \max_{D\times\{0\}}|h_1-h_2|.$$

Dokaz. Razlika $u = u_1-u_2$ zadošča enačbi

$$u_t = k\cdot\Delta u$$

in robnim pogojem $u = g_1-g_2$ na $\partial D\times[0,T]$ ter začetnemu pogoju $u = h_1-h_2$ na $D\times\{0\}$.

~~Dokaz sledi~~ Rezultat sledi neposredno iz izreka.

OPOMBA. Vsoto (+) na desni strani (6.2) lahko nadomestimo z max.

VII. 7. Reševanje Dirichletovega problema s Fourierovo metodo

Dirichletov problem

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{na } D \\ u = g & \text{na } \partial D \end{cases}$$

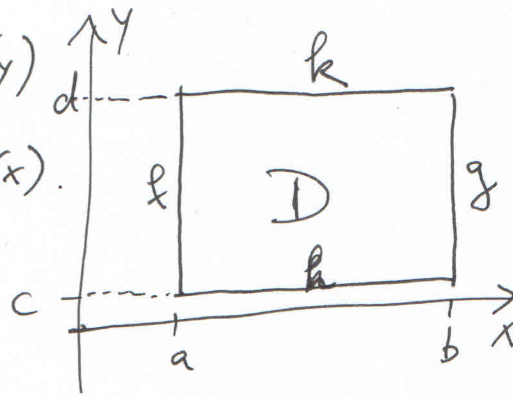
lahko na preprostih domenah rešujemo s Fourierovo metodo, to je, s pomočjo razcepnih rešitev.

1. Pravokotnik v $\mathbb{R}^2$:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{na} \quad (x,y) \in [a,b]\times[c,d]$$

(7.1) robni pogoji.

$$\begin{cases} u(a,y) = f(y), & u(b,y) = g(y) \\ u(x,c) = h(x), & u(x,d) = k(x). \end{cases}$$



Razcepne rešitve:

$$u(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$$

$$(7.2) \quad \begin{cases} X''_{(x)} - \lambda\cdot X_{(x)} = 0 & \text{na} \quad x \in [a,b] \\ Y''(y) + \lambda\, Y(y) = 0 & \text{na} \quad y \in [c,d]. \end{cases}$$

Rešitev problema (7.1) iščemo kot vsoto

$$u = u_1 + u_2 ;$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1(a,y) = f(y), \quad u_1(b,y) = g(y), \\ u_1(x,c) = 0, \quad u_1(x,d) = 0 \end{array}\right\} \qquad (7.3)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_2(a,y) = 0, \quad u_2(b,y) = 0 \\ u_2(x,c) = h(x), \quad u_2(x,d) = k(x) \end{array}\right\} \qquad (7.4)$$

Zadošča analizirati enega od obeh robnih problemov, saj sta analogna.

Recimo torej, da rešujemo enačbo (7.1) z robnimi pogoji (7.3). Funkcija $Y(y)$ v razcepni rešitvi $u = X \cdot Y$ torej zadošča homogenim robnim pogojem $Y(a) = 0$, $Y(b) = 0$.

Rešitve: $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{d-c}\right)^2$; $Y_n(y) = \sin\left(\dfrac{n\pi\cdot(y-c)}{(d-c)}\right)$.

Enačba za $X_n(x)$:

$$X_n'' - \lambda_n^2 \cdot X = 0, \qquad a \leqq x \leqq b.$$

Fundamentalne rešitve:

$$\sinh(\lambda_n\cdot(x-a)); \quad \sinh(\lambda_n(x-b)).$$

Splošna rešitev:

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n y)\cdot\left(A_n \cdot \sinh(\lambda_n(x-a)) + B_n \sinh \lambda_n (x-b)\right)$$

Konstante A_n, B_n določimo iz robnih pogojev.

Podobno najdemo rešitev $u_2(x,y)$ robnega problema (7.4) ter s tem rešitev $u = u_1 + u_2$ problema (7.1).

2. <u>Krog v $\mathbb{R}^2$</u>: $D = \{ x^2 + y^2 \leq R_0^2 \} \subset \mathbb{R}^2$.

Polarne koordinate:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta & 0 \leq r \leq R \\ y = r\cdot\sin\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Preprost račun pokaže:

Če je $u(x,y) = w(r,\theta)$, je

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} =$$

$$= w_{rr} + \frac{1}{r}\cdot w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta} \qquad (7.5).$$

Enačbo $\Delta w = 0$ rešujemo po Fourieru z iskanjem razcepnih rešitev:

$$w(r,\theta) = R(r)\cdot \Theta(\theta). \qquad (7.6).$$

Dobimo sistem navadnih diferencialnih enačb:

$$\begin{cases} r^2\cdot R''(r) + r\cdot R'(r) - \lambda\cdot R(r) = 0, & 0 \leqq r \leqq R_0 \\ \Theta''(\theta) + \lambda\cdot\Theta(\theta) = 0. & (7.7) \end{cases}$$

Robni pogoj: $\begin{cases} w(R_0,\theta) = h(\theta) \\ \lim\limits_{r\downarrow 0} w(r,\theta) \text{ obstaja in je neodvisna od } \theta \end{cases}$

(~~n~~vrednost rešitve pri $x=0,\ y=0$).

$\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ ... periodičnost.

Rešitve Sturm-Liouvillovega problema za Θ:

$$(7.8)\quad \begin{cases} \Theta_n(\theta) = A_n\cdot\cos n\theta + B_n\cdot\sin n\theta, \\ \lambda_n = n^2, \quad n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Enačba za $R_n(r)$:

$$(7.9)\qquad r^2\cdot R_n''(r) + r\cdot R_n'(r) - n^2\cdot R_n(r) = 0$$

Rešitve: $\begin{cases} R_n(r) = C_n\cdot r^n + D_n\cdot r^{-n}; & n=1,2,3,\ldots \\ R_0(r) = C_0 + D_0\cdot \ln r. \end{cases}$

Funkcije r^{-n} $(n \in \mathbb{N})$ ter $\ln r$ so singularne pri $r=0$, zato zahtevamo

$$D_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Tako dobimo nastavek:

$$w(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \left(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \cdot \sin n\theta\right)$$

Direktno lahko preverimo, da je w harmonična.

Konstante α_n, β_n izračunamo iz robnega pogoja: $\quad w(R_0,\theta) = g(\theta)$ (kot Fourierove koef.):

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cdot d\theta$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi \cdot R_0^n}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cdot \cos n\theta \cdot d\theta$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi \cdot R_0^n}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cdot \sin n\theta \cdot d\theta$$