II. 6. PDE 1. REDA V n SPREMENLJIVKAH

Parcialna diferencialna enačba ~~prvega~~ prvega reda za funkcijo $u(x_1,\dots,x_n)$ n spremenljivk $(n>1)$ je oblike

$$F(x_1,\dots,x_n,u,u_{x_1},\dots,u_{x_n})=0. \qquad (6.1)$$

Kvazilinearna P.D.E. je oblike

$$a_1u_{x_1}+a_2u_{x_2}+\dots+a_nu_{x_n}=c \qquad (6.2)$$

Pri tem je F v (6.1) gladka funkcija $2n+1$ spremenljivk, v enačbi (6.2) pa so koeficienti $a_1,a_2,\dots,a_n$ in c gladke funkcije $n+1$ spremenljivk $(x_1,\dots,x_n,u)$.

Enačbe rešujemo na enak način kot v primeru $n=2$, ki smo ga obravnavali v razdelkih II.1. – II.4.; dokazi so analogni.

Začnimo s kvazilinearno enačbo (6.2). Karakteristično vektorsko polje v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}_{(x_1,\dots,x_n,z)}$ je

$$V=(a_1,a_2,\dots,a_n,c)=\sum_{j=1}^{n}a_j\frac{\partial}{\partial x_j}+c\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (6.3)$$

Povrejeni <u>karakteristični</u> <u>sistem</u> navadnih D.E. je

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1,\dots,x_n,z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1,\dots,x_n,z) \\ \dot{z} = c(x_1,\dots,x_n,z) \end{cases} \qquad (6.4)$$

Rešitve tega sistema so <u>karakteristične krivulje</u> enačbe (6.2). Tako kot v primeru $n=2$ vidimo, <u>**da** so</u> <u>integralne ploskve unije karakteristik</u>. Konkretno (partikularno) integralno ploskev dobimo s predpisom začetnih pogojev (<u>Cauchyev problem</u>). Te ploskve so lahko poljubnih dimenzij od 1 do n:

- integralne "ploskve" dimenzije 1 so ravno karakteristične krivulje;
- "ploskve" dimenzije 2 dobimo kot 1-parametrično družino karakteristik;
- integralne ploskve dimenzije n so $(n-1)$-parametrične družine karakteristik.

Zadnji primer je najbolj relevanten, saj so ploskve oblike $z = u(x_1,\dots,x_n)$, kjer je u rešitev enačbe, n-dimenzionalne (grafi nad $\mathbb{R}^n_{(x_1,\dots,x_n)}$).

II.53

Oglejmo si Cauchyev problem za n-dimenzionalne integralne ploskve. Izberemo funkcije (n-1) parametrov $(s_1, \dots, s_{n-1}) = S$:

$$\begin{cases} x_1 = h_1(s_1, \dots, s_{n-1}) = h_1(s) \\ \dots\dots \\ x_n = h_n(s_1, \dots, s_{n-1}) = h_n(s) \\ z = g(s_1, \dots, s_{n-1}) = g(s). \end{cases}$$

Slika preslikave (h, g) je v splošnem ploskev dimenzije (n-1) v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$. Sedaj za vsako točko na tej ploskvi poiščemo karakteristično krivuljo kot rešitev sistema (6.4) v časovni spremenljivki t, tako da smo pri $t=0$ v dani začetni točki. S tem dobimo funkcije

$$R(s_1, \dots, s_{n-1}, t) \begin{cases} x_1(s_1, \dots, s_{n-1}, t) = x_1(s, t) \\ \dots\dots \\ x_n(s_1, \dots, s_{n-1}, t) = x_n(s, t) \\ z(s_1, \dots, s_{n-1}, t) = z(s, t) \end{cases} \qquad (6.5)$$

ki v spremenljivki t zadoščajo sistemu (6.4) ter začetnemu pogoju:

$$\begin{cases} x_k(s_1, \dots, s_{n-1}, 0) = h_k(s_1, \dots, s_{n-1}); \; k=1, \dots, n; \\ z(s_1, \dots, s_{n-1}, 0) = g(s_1, \dots, s_{n-1}) \end{cases}$$

Zanima nas, kdaj lahko ~~to~~ ploskev predstavimo kot graf $z = u(x_1, \dots, x_n)$. V ta namen skušamo enačbe (6.5) rešiti na (s,t) kot funkcije x:

$$\begin{cases} s_1 = s_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ s_{n-1} = s_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \\ t = t(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \qquad (6.6)$$

Če rešitve vstavimo v funkcijo $z(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$, dobimo rešitev PDE (4.2):

$$u(x_1, \dots, x_n) = z\big(s_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t(x_1, \dots, x_n)\big).$$

Po izreku o inverzni preslikavi rešitev (6.6) obstaja v okolici neke točke $(s_1, \dots, s_{n-1}), t = 0$, če so v tej točki vektorji

$$\begin{pmatrix} h_{1\,s_1} \\ h_{2\,s_1} \\ \vdots \\ h_{n\,s_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} h_{1\,s_{n-1}} \\ h_{2\,s_{n-1}} \\ \vdots \\ h_{n\,s_{n-1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

karakteristično vektorsko polje V, projicirano v $\mathbb{R}^n_{(x_1, \dots, x_n)}$

linearno neodvisni. (Pri $n=2$ je to ravno pogoj, da je smerni vektor krivulje v Cauchyevem pogoju linearno neodvisno od karakterističnega polja V, projiciranega v $\mathbb{R}^2$.) Take ploskve imenujemo <u>NEKARAKTERISTIČNE</u>.

Podobno obravnavamo nelinearno enačbo (6.1).
Karakteristični sistem je sedaj

$$\dot{x}_1 = F_{p_1} \qquad p_k = u_{x_k} \quad (k=1,\dots,n)$$
$$\dot{x}_2 = F_{p_2}$$
$$\dots\dots$$
$$\dot{x}_n = F_{p_n}$$
$$\dot{z} = p_1 F_{p_1} + \dots + p_n \cdot F_{p_n}$$
$$\dot{p}_1 = -F_{x_1} - p_1 \cdot F_z$$
$$\dots$$
$$\dot{p}_n = -F_{x_n} - p_n F_z$$

Prvih $(n+1)$ enačb določa pozicijo točke $(x_1,\dots,x_n,z)$ na karakteristiki v konfiguracijskem prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, zadnjih n enačb pa določa odvode $p_k = u_{x_k}$ vzdolž karakteristike; karakteristike so torej krivulje v faznem prostoru $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^n_{(x_1,\dots,x_n)} \times \mathbb{R}_z \times \mathbb{R}^n_{(p_1,\dots,p_n)}$.

Cauchyev problem je v tem nelinearnem primeru določen z $(n-1)$-dimenzionalno ploskvijo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ z \end{pmatrix} = R(s_1,\dots,s_{n-1}) \quad v \quad \mathbb{R}^{n+1}$$

kjer so $s=(s_1,\dots,s_{n-1})$ parametri, ter z izborom funkcij

$$p_k = p_k(s);\quad k=1,\dots,n,$$

tako da je izpolnjen sistem n ~~enač~~ enačb:

$$\begin{cases} z_{s_k}(s) = \sum_{i=1}^{n} p_i(s)\cdot x_i(s)_{s_k} & ;\quad k=1,\dots,n-1 \\ F\big(x_1(s),\dots,x_n(s), z(s), p_1(s),\dots,p_n(s)\big) = 0. \end{cases}$$

Podobno kot v primeru $n=2$ (glej. II.4) lahko dokažemo, da vsak Cauchyev pogoj določa integralno ploskev ~~da~~ oblike

konfig. prostor
$$\begin{cases} x_1(s,t) \\ \dots\dots \\ x_n(s,t) \\ z(s,t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1(s,t) \\ \dots\dots \\ p_n(s,t) \end{cases}$$

Če lahko prvih n enačb rešimo v obliki
$s=s(x)$, $t=t(x)$ $\left(x=(x_1,\dots,x_n)\right)$, vstavimo v z ter dobimo rešitev PDE (6.2):

$$z = u(x_1,\dots,x_n).$$