III. PDE 2. REDA : OSNOVNA TEORIJA

III. 1. Uvod in klasifikacija

Splošna kvazilinearna PDE 2. reda za funkcijo $u(x,y)$ dveh neodvisnih spremenljivk (x,y) je oblike

$$a \cdot u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = d, \qquad (1.1)$$

kjer so a, b, c in d znane funkcije spremenljivk x, y, u, u_x, u_y.

Enačba je semilinearna, če so funkcije a, b, c, ki nastopajo z odvodi 2. reda, odvisne samo od neodvisnih spremenljivk (x,y).

Enačba je linearna, če je semilinearna in je funkcija d linearno odvisna od u, u_x, u_y. Splošna linearna PDE 2. reda za funkcijo $u(x,y)$ je torej oblike

$$L(u) = (a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy}) + d u_x + e u_y + f u = g, \qquad (1.2)$$

kjer so koeficienti a, b, c, d, e, f, g funkcije (x,y).

Operator 2. reda

$$L_0(u) = a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy}, \qquad (1.3)$$

ki vsebuje odvode najvišjega (drugega) reda, se imenuje <u>glavni del</u> linearnega PDO L (1.2). (Angleško: <u>principal part</u>).

Če nadomestimo odvode s spremenljivkami

$$u_{xx} = \xi^2, \quad u_{xy} = \xi \cdot \eta, \quad u_{yy} = \eta^2,$$

dobimo <u>kvadratično formo</u>:

$$\sigma(x,y)(\xi,\eta) = a(x,y)\xi^2 + 2b(x,y)\cdot\xi\eta + c(x,y)\eta^2 \qquad (1.4)$$

na $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$, ki je odvisna od bazne točke (x,y). Forma σ se imenuje <u>simbol operatorja</u> L (in pripadajočega glavnega dela L_0).

Kot bomo videli v nadaljevanju, igra simbol bistveno vlogo pri naravi enačbe (1.2) ter njenih rešitev. Bistveno pri tem je, ali je σ pozitivno (oz. negativno) definitna, nedefinitna (1 pozitivna ter 1 negativna lastna vrednost) oziroma degenerirana (ena ničelna lastna vrednost).

Predpostavili bomo, da je v vsaki točki (x,y) v domeni operatorja vsaj ena od funkcij a, b, c različna od 0.

Kvadratično formo $\sigma(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ predstavimo v obliki

$$\sigma(x,y)\cdot(\xi,\eta) = (\xi,\eta)\cdot\begin{pmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix}. \qquad (1.5)$$

Pripadajoča simetrična matrika $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}$ ima lastni vrednosti $\lambda_1 = \lambda_1(x,y) \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 = \lambda_2(x,y) \in \mathbb{R}$, ki sta rešitvi enačbe

$$\lambda^2 - (a+c)\cdot\lambda + (ac - b^2) = 0 .$$

Število

$$\delta(L)(x,y) = b(x,y)^2 - a(x,y)\cdot c(x,y) \qquad (1.6)$$

se imenuje <u>diskriminanta</u> <u>operatorja</u> L (in njegovega glavnega dela L_0) v točki (x,y). Po Vietovih formulah je $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c$; $\lambda_1\lambda_2 = -\delta$.

<u>DEFINICIJA</u>: Operator L (1.2) oziroma L_0 (1.3) je v točki (x,y):

(a) <u>eliptičen</u>, če je $\delta(x,y) < 0$ ($\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2$ istega znaka)

(b) <u>hiperboličen</u>, če je $\delta(x,y) > 0$ ($\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2$ nasprotnega znaka)

(c) <u>paraboličen</u>, če je $\delta(x,y) = 0$ ($\Leftrightarrow$ ena od λ_1, λ_2 je enaka 0).

III.4

Operator L (in L_0) je torej eliptičen na odprti množici $\{\vartheta < 0\}$, hiperboličen na odprti množici $\{\vartheta > 0\}$ ter paraboličen na zaprti množici $\{\vartheta = 0\}$.

PRIMERI:

1° $L = \Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$. (Laplaceov operator)

$a = c = 1$, $b = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrika σ

$\sigma(x,y)(\xi,\eta) = \xi^2 + \eta^2$ ... simbol

$\vartheta(x,y) = 0 - 1 \cdot 1 = -1$; $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = +1$.

Operator je torej eliptičen na $\mathbb{R}^2$.

2° $L = \partial^2_{tt} - c^2 \cdot \partial^2_{xx}$; $\quad Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx}$.

(Valovni operater)

Spremenljivki (t, x).

$a = 1$, $b = 0$, $c \rightsquigarrow -c^2$; $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}$

$\sigma(\xi,\eta) = \xi^2 - c^2 \cdot \eta^2 = (\xi - c\eta)(\xi + c\eta)$. simbol

$\vartheta = b^2 - a(-c^2) = c^2 > 0$. diskriminanta.

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -c^2$.

Operator je hiperboličen na $\mathbb{R}^2$.

Podobno: $L = \partial^2_{tt} - c^2 \cdot \Delta$ na $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$.

Signatura: $(1, -1, -1, \dots, -1)$.

3° $L = \partial_t - k\cdot\partial^2_{xx}$ (ali $\partial_t - k\cdot\Delta$).

$L_0 = -k\cdot\partial^2_{xx}$; $a = b = 0$, $c = -k$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -k,\ \delta = 0.$

Toplotni operator je parabolični na $\mathbb{R}^2_{(t,x)}$.

4° Tricomijeva enačba:

$L(u) = u_{xx} + x\cdot u_{yy} = 0.$

$a = 1,\ b = 0,\ c = x;$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = x$

$\delta(x,y) = -x.$

Enačba je
- eliptična na polravnini $x > 0$
- hiperbolična na $x < 0$.
- parabolična na premici $x = 0$.

5° $L(u) = u_{xx} - 2\sin x\cdot u_{xy} - \cos^2 x\cdot u_{yy} - \cos x\cdot u_y = 0.$

matrika σ: $\begin{pmatrix} 1 & -\sin x \\ -\sin x & -\cos^2 x \end{pmatrix}$

$\delta(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Enačba je torej hiperbolična na $\mathbb{R}^2$.

III.2 Transformacija koordinat

Naj bo L linearen PDO 2. reda:

$$L(u) = \underbrace{a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy}}_{L_0(u)} + d u_x + e u_y + f \cdot u = g. \quad (2.1)$$

Ogledali si bomo transformacijo operatorja pri gladki zamenjavi koordinat

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y).$$

Označimo iskano funkcijo v novih koordinatah z

$$w(\xi, \eta) = w(\xi(x,y), \eta(x,y)) = u(x,y).$$

Po verižnem pravilu je:

$$u_x = w_\xi \cdot \xi_x + w_\eta \cdot \eta_x$$

$$u_y = w_\xi \cdot \xi_y + w_\eta \cdot \eta_y.$$

$$u_{xx} = w_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2 w_{\xi\eta} \cdot \xi_x \eta_x + w_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + w_\xi \cdot \xi_{xx} + w_\eta \cdot \eta_{xx}$$

$$u_{yy} = w_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2 w_{\xi\eta} \cdot \xi_y \cdot \eta_y + w_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + w_\xi \cdot \xi_{yy} + w_\eta \cdot \eta_{yy}$$

$$u_{xy} = w_{\xi\xi} \cdot \xi_x \xi_y + w_{\xi\eta}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + w_{\eta\eta}\, \eta_x \eta_y + w_\xi \cdot \xi_{xy} + w_\eta \cdot \eta_{xy}.$$

Če vstavimo v operator $L(u)$, dobimo

$$L(u) = \tilde{L}(w) = A\cdot w_{\xi\xi} + 2B\cdot w_{\xi\eta} + C w_{\eta\eta}$$
$$+ D w_{\xi} + E w_{\eta} + F\cdot w = G. \qquad (2.2)$$

Koeficienti glavnega dela $\tilde{L}_0(w)$ so enaki:

$$(2.3)\quad \begin{cases} A(\xi,\eta) = a\cdot \xi_x^2 + 2b\cdot \xi_x \xi_y + c\cdot \xi_y^2 \\ \qquad = \sigma(\xi_x, \xi_y) \qquad (\sigma = \text{simbol op. } L) \\ B(\xi,\eta) = a\,\xi_x \eta_x + b(\xi_x \eta_y + \xi_y\cdot \eta_x) + c\cdot \xi_y \eta_y \\ C(\xi,\eta) = a\cdot \eta_x^2 + 2b\cdot \eta_x \eta_y + c\cdot \eta_y^2 = \sigma(\eta_x, \eta_y) \end{cases}$$

<u>V matrični obliki:</u>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrika simbola} \\ \sigma(\tilde{L}_0) = \sigma(\tilde{L})}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Jacobijeva} \\ \text{matrika} \\ \text{transf.} \\ J}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrika} \\ \text{simbola} \\ \sigma(L)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}}_{J^t}.$$

<u>Sledi</u>: $$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \underbrace{(\det J)^2}_{\substack{\vee \\ 0}} \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Torej $$\sigma(\tilde{L})(\xi,\eta) = (\det J)^2 \cdot \sigma(L)(x,y). \qquad (2.4)$$

S tem smo dokazali naslednjo trditev.

<u>Trditev</u>. Tip linearnega PDO 2. reda (2.1) (eliptičen, hiperboličen, paraboličen) je neodvisen od izbire koordinat.

<u>Natančno</u>: Tip operatorja $\tilde{L}(w)$ (2.2) v točki $(\xi, \eta) = (\xi(x,y), \eta(x,y))$ je enak tipu operatorja L (2.1) v točki (x,y).

<u>III.3 Transformacija hiperboličnega operatorja v kanonično obliko.</u>

<u>IZREK</u>. Denimo, da je PDO L (2.1) hiperboličen na domeni $D \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$. Potem v okolici poljubne (+) točke $(x_0, y_0) \in D$ obstaja koordinatni sistem $(\xi, \eta) = (\xi(x,y), \eta(x,y))$, v katerem je L oblike

$$\tilde{L}(w) = w_{\xi\eta} + l_1(w) = 0, \qquad (3.1)$$

kjer je l_1 linearen PDO 1. reda.

Glavni del operatorja $\tilde{L}$ je $\tilde{L}_0(w) = w_{\xi\eta}$.

(+) Predpostaviti je potrebno $a(x_0,y_0) \neq 0$ ali $c(x_0,y_0) \neq 0$!

<u>Dokaz</u>. Iz formul (2.3) za koeficiente A, B, C glavnega dela $\tilde{L}_0$ operatorja $\tilde{L}$ vidimo, da moramo izbrati koordinati $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ tako, da velja:

$$(3.2) \quad \begin{cases} A(\xi,\eta) = a\cdot\xi_x^2 + 2b\,\xi_x\cdot\xi_y + c\cdot\xi_y^2 = 0 \\ C(\xi,\eta) = a\cdot\eta_x^2 + 2b\cdot\eta_x\cdot\eta_y + c\cdot\eta_y^2 = 0. \end{cases}$$

Koeficienta B sicer ne moremo normirati na 1 s spremembo koordinat, lahko pa novo enačbo s tem koeficientom delimo in tako dobimo enačbo oblike (3.1). <u>Predpostavimo</u>, da je $a \neq 0$.

Enačbi v (3.2) sta enake oblike; iščemo ξ (oz. η), tako da bo gradient (ξ_x, ξ_y) ničelni vektor kvadratične forme $\sigma(x,y)(\xi_x, \xi_y)$ (torej ničelni vektor simbola operatorja v (x,y)). Ker je operator hiperboličen, ima dva ničelna vektorja, ki sta rešitvi enačb

$$\left.\begin{aligned} a\,\xi_x + (b+\sqrt{\delta})\cdot\xi_y &= 0 \\ a\cdot\eta_x + (b-\sqrt{\delta})\cdot\eta_y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

kjer je $\delta = b^2 - ac$ diskriminanta operatorja.

Očitno je (3.3) sistem dveh neodvisnih linearnih homogenih PDE 1. reda za $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$.

Take enačbe znamo rešiti z metodo karakteristik (poglavje II):

$$\dot{x} = a; \quad \dot{y} = b \pm \sqrt{\delta}; \quad (\dot{\xi} = 0) \quad (\dot{\eta} = 0). \qquad (3.4)$$

Iz prvih dveh enačb lahko ob predpostavki $a \neq 0$ eliminiramo parameter t in ju zapišemo v obliki

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{\delta}}{a}; \quad \delta > 0. \qquad (3.5)$$

Desna stran je funkcija (x,y), torej imamo dve navadni D.E za $y = y(x)$. (Lahko pa tudi rešujemo enačbo za dy/dx.) Rešitvi, ki jo imenujemo $\xi(x,y)$ in $\eta(x,y)$, dasta koordinatni sistem, v katerem je $\tilde{L}$ oblike $2B \cdot w_{\xi\eta}$.

Po deljenju z $2B$ dobimo enačbo (3.1).

OPOMBA: Krivulje, ki rešijo enačbi (3.4), oz. (3.5) se imenujejo karakteristike operatorja L (oz. karakteristične projekcije).

Primer: Valovna enačba:

$$Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

$a = 1,\ b = 0,\ c \rightsquigarrow -c^2,\ \delta = c^2$

Enačba (3.5) $(x \rightsquigarrow t,\ y \rightsquigarrow x)$ je:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\delta} = \pm c \quad \ldots \text{karakteristike}.$$

Rešitvi: $\xi = x + ct,\quad \eta = x - ct.$

$$u_t = c \cdot w_\xi - c \cdot w_\eta = c(w_\xi - w_\eta)$$

$$u_x = w_\xi + w_\eta$$

$$u_{tt} = c^2\left(w_{\xi\xi} - 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}\right)$$

$$u_{xx} = w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}$$

$$\underbrace{u_{tt} - c^2 u_{xx}}_{L(u)} = \underbrace{-4c^2 \cdot w_{\xi\eta}}_{\tilde{L}(w)} = 0$$

III.4 Kanonična oblika parabolične PDE 2. reda.

Naj bo L linearen PDO oblike (1.2):

$$Lu = \underbrace{a \cdot u_{xx} + 2b\, u_{xy} + c\, u_{yy}}_{L_0(u)} + (\text{členi nižjega reda})$$

IZREK. Če je operator L paraboličen na domeni $D \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$, potem v okolici poljubne točke $(x_0, y_0) \in D$ obstajajo koordinate (ξ, η), v katerih je operator oblike

$$w_{\xi\xi} + l_1(w) = 0 \qquad (4.1)$$

kjer je l_1 . linearen PDO 1. reda.

Dokaz. Sedaj je $\delta(L) = b^2 - ac = 0$ na D.

Lahko vzamemo, da je $a(x_0, y_0) \neq 0$. (Če je $c(x_0, y_0) \neq 0$, je argument analogen. Če sta obe funkciji enaki 0, je tudi $b_{(x_0,y_0)} = 0$, kar je v protislovju s predpostavko).

Ker je izrek lokalne narave, lehko torej vzamemo, da je $a \neq 0$ na D.

Iščemo koordinati $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, v katerih je

$$B(\xi, \eta) = 0, \quad C(\xi, \eta) = 0.$$

Tu so A, B, C funkcije, podane z (2.3), to je, koeficienti glavnega dela operatorja v koordinatah (ξ, η).

Dovolj je dokazati, da velja $C=0$, saj iz paraboličnosti enačbe odtod sledi $B^2=A\cdot C=0$.

Torej moramo najti funkcijo $\eta=\eta(x,y)$, ki zadošča

$$C = a\cdot\eta_x^2 + 2b\cdot\eta_x\cdot\eta_y + c\cdot\eta_y^2$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\left(a\cdot\eta_x + b\cdot\eta_y\right)^2 = 0.$$

Pri računu smo upoštevali $b^2/a = c$, kar je ravno paraboličnost operatorja L.

Torej mora biti $\eta(x,y)$ rešitev linearne homogene PDE 1. reda

$$a\cdot\eta_x + b\cdot\eta_y = 0. \qquad (4.2)$$

Tako enačbo znamo rešiti z metodo karakteristik (poglavje III, razdelek 1-2). Funkcija η mora biti konstantna na vsaki karakteristični projekciji (ker je desna stran 0). Karakteristične projekcije so rešitve sistema NDE

$$\dot{x} = a, \quad \dot{y} = b$$

oziroma $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}}$. To je navadna dif. enačba za funkcijo $y=y(x)$.

Primer: $Lu = x^2 u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + y^2 \cdot u_{yy}$

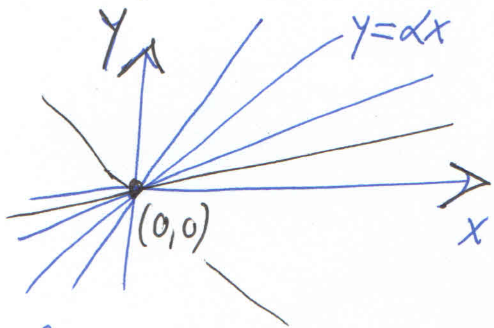
$$a = x^2,\ b = xy,\ c = y^2;\quad b^2 = ac.$$

Enačba karakterističnih projekcij je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = \frac{xy}{x^2} = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

Torej $\quad \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$;

Rešitev: $\begin{cases} \ln y = \ln x + \ln \alpha \\ y = \alpha \cdot x \end{cases}$ (α konstanta)



Karakteristične projekcije so torej premice $\{y = \alpha x : \alpha \in \mathbb{R}\}$, na vsaki od njih mora biti η konstantna. Torej lahko vzamemo

$$\eta(x,y) = \frac{y}{x}\ ; \quad \xi(x,y) = x .$$

Sedaj je $\begin{cases} A = a \cdot \xi_x^2 + 2b\, \xi_x \xi_y + c\, \xi_y^2 = x^2 = \xi^2. \\ B = \sqrt{AC} = 0 \\ C = 0. \end{cases}$

V novih koordinatah je enačba za $w(\xi,\eta)$

$$\xi^2 \cdot w_{\xi\xi} + \text{členi nižjega reda} = 0 .$$

Dobimo $\quad w_{\xi\xi} + l_1(w) = 0.$

III. 5. Kanonična oblika eliptične PDE 2. reda.

Definicija. Funkcija $f(x,y)$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^2$ se imenuje *realno analitična*, če je lokalno v neki okolici poljubne točke $(x_0,y_0) \in D$ enaka vsoti konvergentne potenčne vrste:

$$f(x,y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} c_{jk}\,(x-x_0)^j\,(y-y_0)^k .$$

IZREK. Naj bo $L(u) = a\,u_{xx} + 2b\,u_{xy} + c\,u_{yy} + \cdots$ linearen eliptičen PDO z realno analitičnimi koeficienti a, b, c na domeni $D \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$.
Potem obstajajo v ~~a~~ neki okolici poljubne točke $(x_0,y_0) \in D$ koordinate $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, podane z realno analitičnimi funkcijami, v katerih je operator oblike

$$\tilde{L}(w) = \underbrace{w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta}}_{\Delta w} + l_1(w) = 0 \qquad (5.1)$$

kjer je l_1 parc. dif. operator 1. reda.

Dokaz. Iščemo funkciji $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, ki zadoščata sistemu enačb

$$A = C, \quad B = 0.$$

Po deljenju s funkcijo $A = C$ bomo dobili operator oblike (5.1). Torej:

$$(5.2)\quad \begin{cases} a\xi_x^2 + 2b\cdot\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = a\eta_x^2 + 2b\cdot\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \\ a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\cdot\eta_x) + c\xi_y\cdot\eta_y = 0 \end{cases}$$

Če uvedemo kompleksno funkcijo

$$\phi = \xi + i\eta,$$

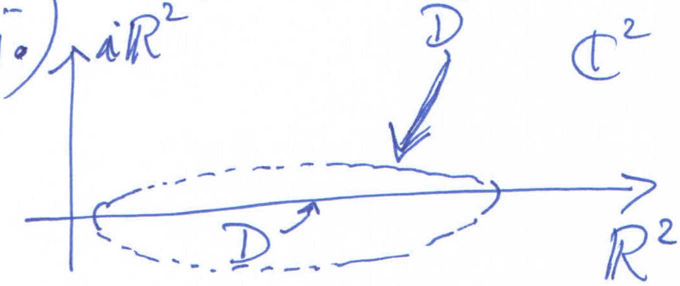
je sistem (5.2) ekvivalenten kompleksni enačbi za ϕ:

$$(5.3)\qquad a\cdot\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 = 0$$

To je ista enačba, kot smo jo dobili v hiperboličnem primeru, le da je sedaj zaradi $\delta = b^2 - ac < 0$ enačba nerazcepna v realnem. Ker pa je ϕ kompleksna funkcija, lahko razcepimo v kompleksnem v obliki

$$(5.4)\qquad a\phi_x + \left(b \pm i\sqrt{ac-b^2}\right)\phi_y = 0.$$

To enačbo rešujemo v ustrezni kompleksni domeni $\tilde{D} \subset \mathbb{C}^2$. Vsaka od funkcij, ki nastopa v enačbi, je realno analitična, torej jo lahko (lokalno) razširimo do kompleksno analitične (holomorfne) funkcije dveh kompleksnih spremenljivk x, y. (Vstavimo kompleksne vrednosti x, y v vrste, ki definirajo te funkcije. Za (x,y) blizu $(x_0, y_0) \in D$ te vrste še vedno konvergirajo in s tem definirajo holomorfne razširitve danih funkcij. Temu postopku pravimo kompleksifikacija funkcij.)



Tudi $\phi(x,y)$ iščemo kot kompleksno analitično (holomorfno) funkcijo spremenljivk $(x,y) \in \tilde{D}$.

Eksistenčna teorija za PDE, ki smo jo razvili v realnem, deluje (za holomorfne DE) tudi v kompleksnem. Iskana funkcija ϕ mora biti konstantna na (kompleksnih) karakteristikah, ki so rešitve enačbe (če je $a \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{ac-b^2}}{a} = \frac{b \pm \sqrt{\delta}}{a}.$$

III. 18

Zadošča rešiti eno od teh enačb ter definirati ϕ kot funkcijo, ki je konstantna na vsaki od teh krivulj ter ima neničeln odvod v drugi smeri. Funkciji (realni!)

$$\xi = \operatorname{Re}\phi, \qquad \eta = \operatorname{Im}\phi$$

takoj podajata (pri realnih vrednostih (x,y)) lokalni koordinatni sistem v okolici izbrane točke (x_0, y_0), v katerem je $A = C$, $B = 0$.

<u>OPOMBA</u>: Če definiramo še funkcijo

$$\psi = \xi - i\eta$$

je pri realnih vrednostih x, y: $\psi = \bar{\phi}$.

Funkciji ϕ, ψ iščemo kot rešitvi enačbe (5.4), ena z znakom $+$ pri korenu in druga z znakom $-$. V teh kompleksnih koordinatah se glavni del operatorja spremeni v $4v_{\phi\psi}$ (kot v primeru hiperbolične enačbe). Preprost račun pokaže

$$4v_{\phi\psi} = v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}.$$

III. 19

Primer: $u_{xx} + x \cdot u_{yy} = 0, \quad x > 0.$

$a = 1,\ b = 0,\ c = x > 0;\ -\delta = ac - b^2 = x > 0.$

Enačba karakteristik:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\left(b \pm i\sqrt{-\delta}\right) = \pm i\sqrt{x}.$$

$$dy = \pm i \cdot \sqrt{x} \cdot dx = \pm i \tfrac{2}{3} d\sqrt{x}^3$$

$$y = \pm \frac{2i}{3}\sqrt{x}^3 + \text{konst}; \quad \phi = \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 \pm iy$$

Kanonični spremenljivki:

$$\xi = \frac{2}{3}\sqrt{x}^3; \quad \eta = y.$$

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = \sqrt{x} \cdot u_\xi$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\eta.$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot u_\xi + \sqrt{x} \cdot u_{\xi\xi} \cdot \sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot u_\xi + x \cdot u_{\xi\xi}$$

$$u_{yy} = u_{\eta\eta}$$

$$u_{xx} + x u_{yy} = \frac{1}{2\sqrt{x}} u_\xi + x \cdot u_{\xi\xi} + x \cdot u_{\eta\eta}$$

$$= x \cdot \left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{x}^3} \cdot u_\xi\right)$$

$$\frac{1}{x} u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi} \cdot u_\xi.$$

III.6. Cauchyev problem in karakteristike

V tem razdelku si bomo ogledali Cauchyev problem za kvazilinearno PDE 2. reda:

$$a \cdot u_{xx} + 2b\, u_{xy} + c\, u_{yy} = d. \qquad (6.1)$$

Naj bo $\gamma \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ krivulja, podana parametrično:

$$x = f(s), \quad y = g(s) \quad (s \text{ parameter}). \qquad (6.2)$$

Vzdolž te krivulje želimo predpisati vrednost rešitve u ter njene prve parcialne odvode:

$$u = h(s), \quad u_x = \varphi(s), \quad u_y = \psi(s). \qquad (6.3)$$

Funkcije $(f(s), g(s), h(s), \varphi(s), \psi(s))$ definirajo krivuljo v $\mathbb{R}^5_{(x,y,u,p,q)}$. Cauchyev problem je poiskati rešitev enačbe (6.1), ki ima nad krivuljo $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ (6.2) vrednosti (6.3).

Za vsako C^1 funkcijo $v(x,y)$ so njena vrednost ter prvi parcialni odvodi v_x, v_y vzdolž krivulje (6.2) povezani z enačbo (ki sledi iz verižnega pravila):

$$\frac{dv}{ds} = v_x \cdot f'(s) + v_y \cdot g'(s). \qquad (6.4)$$

Rešitev Cauchyevega problema mora torej zadoščati pogoju

$$h'(s) = \varphi(s) \cdot f'(s) + \psi(s) \cdot g'(s). \qquad (6.5)$$

Za dani funkciji f, g je to linearna zveza med $h'(s)$, $\varphi(s)$, $\psi(s)$, torej lahko samo dve od teh funkcij prosto izberemo.

Kompatibilitetni pogoj (6.4) velja tudi za višje odvode poljubne funkcije v vzdolž γ. Za funkciji $v = u_x$ in $v = u_y$ tako dobimo enačbi:

$$\begin{cases} \dfrac{du_x}{ds} = u_{xx} \cdot f'(s) + u_{xy}\, g'(s) \\[2ex] \dfrac{du_y}{ds} = u_{xy} \cdot f'(s) + u_{yy} \cdot g'(s). \end{cases} \qquad (6.6)$$

Če je u rešitev Cauchyevega problema (6.1)–(6.3), je $u_x = \varphi(s)$, $u_y = \psi(s)$ vzdolž γ. Tako dobimo sistem treh enačb za 2. parcialne odvode u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} vzdolž γ (enačbe (6.1) in (6.6)):

$$\left.\begin{aligned} a \cdot u_{xx} + 2b\, u_{xy} + c\, u_{yy} &= d \\ f' \cdot u_{xx} + g' \cdot u_{xy} \qquad\quad &= \varphi' \\ f' \cdot u_{xy} + g' \cdot u_{yy} &= \psi' \end{aligned}\right\} \qquad (6.7)$$

Ta sistem linearnih enačb za u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} ima enolično rešitev natanko tedaj, ko je

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a & 2b & c \\ f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \end{pmatrix} = a\cdot g'^2 - 2b\cdot f'\cdot g' + c\cdot f'^2 \neq 0. \qquad (6.8)$$

Definicija: Krivulja γ: $x = f(s)$, $y = g(s)$ v $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ je karakteristična, če velja

$$\Delta \stackrel{def}{=} a\cdot g'^2 - 2b\, f'\cdot g' + c\cdot f'^2 \equiv 0 \qquad (6.9)$$

in je nekarakteristična, če je $\Delta \neq 0$ vzdolž krivulje.

Enačbo karakteristik (6.9) lahko v primeru $a \neq 0$ zapišemo v obliki $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{g'}{f'} \right)$:

$$a\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\cdot\frac{dy}{dx} + c = 0,$$

oziroma

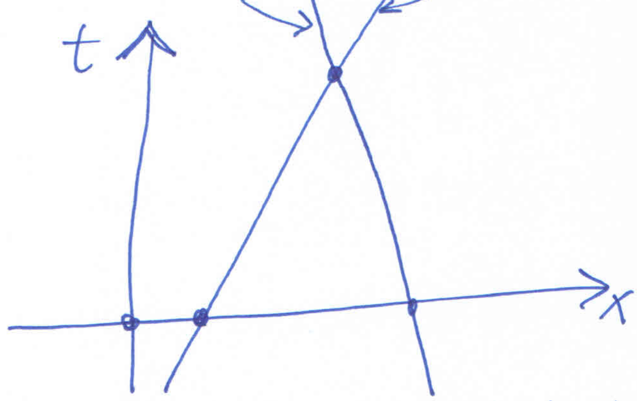
$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \qquad (6.10)$$

V primeru, ko je (6.1) semilinearna enačba (torej so a, b, c funkcije spremenljivk (x,y)), je (6.10) navadna diferencialna enačba za $y = y(x)$, ki ima dve neodvisni rešitvi v hiperboličnem primeru ($b^2 - ac > 0$), eno rešitev v paraboličnem primeru ($b^2 - ac = 0$), ter nima rešitev v eliptičnem primeru ($b^2 - ac < 0$).

Primer: Valovna enačba $u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = 0$

ima karakteristike

$$\frac{dx}{dt} = \pm c; \qquad x \pm ct = \text{konst.}$$



Denimo sedaj, da je

$\gamma \subset \mathbb{R}^2$ (6.2) nekarakteristična krivulja.

Denimo, da je $u(x,y)$ rešitev enačbe (6.1) ter Cauchyevega problema (6.2),(6.3). Z odvajanjem enačbe (6.1) po x dobimo:

$$(6.11) \qquad a \cdot u_{xxx} + 2b\, u_{xxy} + c \cdot u_{xyy} = \left(\text{členi z odvodi do reda} \le 1\right),$$

Sedaj uporabimo še kompatibilitetni pogoj (6.4) za funkciji $v = u_{xx}$ in $v = u_{xy}$ (ti dve funkciji sta vzdolž γ natanko določeni kot rešitvi sistema (6.7)). Dobimo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{ds} u_{xx} &= u_{xxx} \cdot f'(s) + u_{xxy} \cdot g'(s) \\ \frac{d}{ds} u_{xy} &= u_{xxy} f'(s) + u_{xyy} \cdot g'(s) \end{aligned}\right\} \qquad (6.12)$$

Enačbi (6.11) in (6.12) skupaj sestavljata sistem treh linearnih enačb za odvode $u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy}$ vzdolž krivulje γ. Determinanta sistema je

$$\det \begin{pmatrix} a & 2b & c \\ f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \end{pmatrix} = \Delta \neq 0,$$

ker je γ nekarakteristična. Torej so vrednosti odvodov $u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy}$ vzdolž nekarakt. krivulje $\gamma \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ natanko določene s Cauchyevimi podatki (6.3).

Isti argument lahko ponovimo z odvajanjem enačbe (6.1) po y; ponovno dobimo sistem z determinanto $\Delta \neq 0$. in s tem enolično rešitev za odvode $u_{xxy}, u_{xyy}, u_{yyy}$. Ker pa sta u_{xxy} in u_{xyy} znana že iz prejšnjega koraka, dobimo odtod vrednost u_{yyy}. vzdolž γ.

Sedaj ponovno odvajamo enačbo (6.11) na x in y ter dobimo sistem linearnih enačb za 4. odvode funkcije $u(x,y)$ vzdolž γ, z determinanto $\Delta \neq 0$.

S ponavljanjem (indukcijo) vidimo, da so vsi parcialni odvodi (poljubnega reda) rešitve $u(x,y)$ Cauchyevega problema vzdolž karakteristične krivulje natanko določeni.
Iz teh odvodov sestavimo formalno Taylorjevo vrsto funkcije $u(x,y)$ v poljubni točki

$$(x_0, y_0) = (f(s_0), g(s_0)) \in \gamma : \qquad (6.13)$$

$$u(x,y) \text{ "="} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+l} u(x_0,y_0)}{\partial x^k \cdot \partial x^l} \cdot \frac{1}{k!\, l!} (x-x_0)^k \cdot (y-y_0)^l$$

IZREK (CAUCHY-KOWALEWSKI):
Če so vsi podatki v (6.1), (6.2), (6.3) realno analitične funkcije in je krivulja (6.2) nekarakteristična, potem dobljena vrsta (6.13) konvergira v neko okolici poljubne točke $(x_0, y_0) \in \gamma$ in predstavlja rešitev Cauchyevega problema (6.1)–(6.3).