II.5 SISTEM DVEH PDE 1. REDA, PFAFFOVA ENAČBA IN FROBENIUSOV IZREK.

Zanimajo nas rešitve $z = u(x,y)$ sistema dveh PDE:

$$\begin{cases} F_1(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y)) = 0 \\ F_2(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y)) = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Uvedemo oznake $z \doteq u$, $p = u_x$, $q = u_y$:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, p, q) = 0 \\ F_2(x, y, z, p, q) = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Sistem bomo obravnavali v točki (x, y, z, p_0, q_0), v kateri velja

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p} & \frac{\partial F_1}{\partial q} \\ \frac{\partial F_2}{\partial p} & \frac{\partial F_2}{\partial q} \end{pmatrix} \neq 0 . \tag{5.3}$$

V okolici take točke (p_0, q_0) nam izrek o implicitni funkciji zagotavlja obstoj rešitve sistema (5.2) za p in q kot funkcija spremenljivk (x, y, z):

$$\begin{cases} p = a(x, y, z) \\ q = b(x, y, z) . \end{cases}$$

Torej je sistem (5.1) ekvivalenten preprostejšemu sistemu:

$$\begin{cases} u_x = a(x, y, u) \\ u_y = b(x, y, u) \end{cases} \tag{5.4}$$

Sistem (5.4) nam pove, da je tangentna ravnina na polnilno rešitev $z = u(x,y)$ v točki (x_0, y_0, z_0) enaka

$$dz = a(x_0, y_0, z_0) \cdot dx + b(x_0, y_0, z_0) \cdot dx$$

torej je povsem določena s točko v prostoru $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$.

To je v velikem nasprotju s situacijo pri eni PDE, kjer je v splošnem množica vseh možnih tangentnih ravnin odvisna od enega parametra (torej je krivulja v $\mathbb{R}^2_{(p,z)}$).

Ta "predoločenost" sistema povzroči, da v splošnem nimamo rešitev. Potrebni pogoj za obstoj rešitve $z = u(x,y)$ razreda C^2 dobimo tako, da enačbi v (5.4) odvajamo po y oziroma x ter upoštevamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Tako dobimo:

$$(u_x)_y = a_y + a_z \cdot u_y = a_y + a_z \cdot b$$

$$(u_y)_x = b_x + b_z \cdot u_x = b_x + b_z \cdot a$$

Torej mora biti razdolžje polnilne rešitve izpolnjen pogoj

$$a_y + a_z \cdot b = b_x + b_z \cdot a \qquad (5.5)$$

V posebnem primeru, ko sta a in b neodvisni od 3. spremenljivke z, dobimo pogoj

$$a_y = b_x . \qquad (5.6)$$

Ta pogoj ima preprosto geometrijsko interpretacijo:

Sistem (5.4) lahko zapišemo v obliki

$$\nabla u = (u_x, u_y) = (a, b) =: v ;$$

potreben pogoj za obstoj rešitve je

$$\nabla \times v = \operatorname{rot} v = 0 ,$$

kar pomeni ravno $a_y = b_x$ (5.6). Vemo, da je lokalno (na enostavno povezanih množicah v $\mathbb{R}^2$) pogoj $\operatorname{rot} v = 0$ (torej pogoj (5.6)) tudi zadosten.

Sedaj bomo dokazali še analogen rezultat za splošen primer.

IZREK. Denimo, da $\mathcal{C}^2$ funkciji $a(x,y,z)$ in $b(x,y,z)$ na neki domeni $D \subset \mathbb{R}^3$ zadoščata pogoju (5.5). Potem skozi vsako točko $(x_0, y_0, z_0) \in D$ poteka natanko ena lokalna rešitev $z = u(x,y)$ sistema (5.4), tako da je $z_0 = u(x_0, y_0)$.

Obratno: če skozi točko (x_0, y_0, z_0) poteka neka rešitev sistema (5.4), potem v tej točki velja pogoj (5.5).

Dokaz. Obratno trditev smo že dokazali.

. Recimo sedaj, da (5.5) velja. Vsaki od enačb v (5.4) priredimo njeno karakteristično vektorsko polje:

$$V = (1, 0, a(x,y,z))$$
$$W = (0, 1, b(x,y,z)).$$

Rešitev $z = u(x,y)$ (integralno ploskev) skozi dano začetno točko (x_0, y_0, z_0) skušamo poiskati v dveh korakih:

1° Najprej skozi (x_0, y_0, z_0) napeljemo tokovnico polja V, to je karakteristiko prve enačbe v sistemu (5.4). Ta je rešitev NDE:

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{x} = 1 & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = 0 & y(0) = y_0 \\ \dot{z} = a(x,y,z) & z(0) = z_0. \end{array}\right\} \text{ začetni pogoj}$$

Rešitev je očitno oblike

$$\gamma(x) = (x, y_0, h(x)),$$

kjer je x parameter in $h(x)$ zadošča enačbi

$$h'(x) = a(x, y_0, h(x)). \qquad (5.6)$$

To je navadna dif. enačba za $h(x)$.

2° V drugem koraku napeljemo skozi vsako točko krivulje $g(x)$ (iz 1. koraka) karakteristiko druge enačbe v sistemu (5.4):

$$(5.7)\quad \left.\begin{cases} \dot{x} = 0 & x(0) = x \\ \dot{y} = 1 & y(0) = y_0 \\ \dot{z} = b(x,y,z) & z(0) = h(x) \end{cases}\right\} \text{začetni pogoj.}$$

Vzdolž rešitve je x konstanta ter $y(t) = y_0 + t$. Torej lahko izločimo t ter vzamemo spremenljivko y za parameter vzdolž karakteristike. Rešitev je torej oblike

$$z = u(x,y),$$

pri čemer velja

$$u(x, y_0) = h(x) \qquad \text{(začetni pogoj)}$$

ter $$u_y(x,y) = b(x,y,u(x,y)),$$

kot sledi iz 3. enačbe v (5.7).

Trdimo, da tako dobljena funkcija $u(x,y)$ zadošča tudi prvi enačbi v sistemu (5.4). Pri tem računu bomo seveda potrebovali predpostavko (5.5). Geometrijsko to pomeni, da je za vsak y pot $x \mapsto (x, y, u(x,y))$ karakteristika 1. enačbe v (5.4).

II.39

Za dokaz si oglejmo funkcijo

$$U(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - a(x,y,u(x,y)).$$

Pri $y = y_0$ velja $U(x,y_0) = 0$, saj je

$u(x,y_0) = h(x)$ in $u_x(x,y_0) = h'(x) = a(x,y_0,h(x))$ (5.6).

Odvajajmo sedaj na y ter upoštevajmo $u_y = b$:

$$\begin{aligned} U_y(x,y) &= u_{xy} - a_y - a_z \cdot u_y \\ &= (u_y)_x - a_y - a_z \cdot b \\ &= \frac{\partial}{\partial x} b(x,y,u(x,y)) - a_y - a_z \cdot b \\ &= b_x + b_z \cdot u_x - a_y - a_z b \\ &= b_z \cdot (\underbrace{U + a}_{= u_x}) + b_x - a_y - a_z b \\ &= b_z \cdot U + (a \cdot b_z + b_x - a_y - a_z b). \end{aligned}$$

Poggoj (5.5) ravno pomeni, da je izraz v oklepaju enak nič. Torej funkcija U zadošča NDE

$$\frac{\partial U}{\partial y} = b_z \cdot U, \quad U(x,y_0) = 0.$$

Ker tudi ničelna funkcija $U \equiv 0$ zadošča tej enačbi, sledi iz enoličnosti rešitve $U \equiv 0$. ∎

OPOMBA. Iz enoličnosti rešitve skozi podano točko $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{D}$ sledi naslednje. Denimo, da sta $z = u_1(x,y)$ in $z = u_2(x,y)$ dve rešitvi sistema (5.5), definirani na domenah $U_1 \subset \mathbb{R}^2$, $U_2 \subset \mathbb{R}^2$. Če za neko točko $(x_0, y_0) \in U_1 \cap U_2$ velja

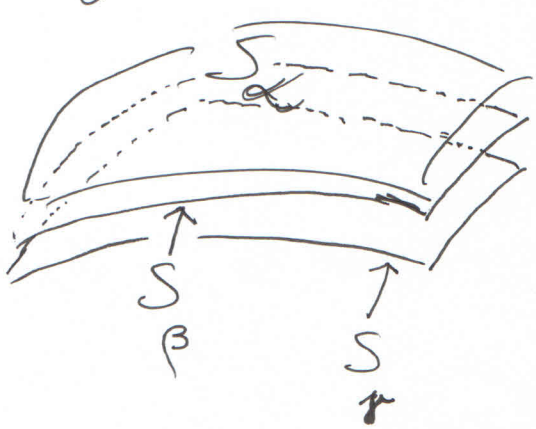
$$u_1(x_0, y_0) = u_2(x_0, y_0),$$

potem velja $u_1 = u_2$ na povezani komponenti preseka $U_1 \cap U_2$, ki vsebuje točko (x_0, y_0).

To sledi iz dejstva, da je množica točk (x,y), v katerih velja $u_1 = u_2$, zaprta (ker sta u_1, u_2 zvezni) ter odprta (zaradi enoličnosti rešitve).

Odtod sledi, da se lokalne rešitve sestavijo v globalne rešitve (integralne plaskve), ki tvorijo razslojitev oziroma foliacijo domene D:

$$D = \bigcup_{\alpha} S_\alpha$$



Geometrijsko je slika podobna kot pri faznem portretu sistema navadnih D.E., le da so sedaj integralne plaskve 2-razsežne.

NALOGA: Dokaži, da iz pogoja (5.5) sledi, da tokova φ_t, ψ_s vektorskih polj $V=(1,0,a)$, $W=(0,1,b)$ komutirata:

$$\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t \quad \left(\text{na skupni domeni}\right).$$

Sistem enačb (5.4) (in s tem (5.1) ob pogoju (5.3)) lahko ekvivalentno obravnavamo kot t.i.

PFAFFOVO ENAČBO:

Poišči plaskve $S \subset \mathbb{R}^3$, ki so v vsaki točki $(x,y,z) \in S$ pravokotne na predpisano vektorsko polje $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$.

($F = V \times W$ = vektorski produkt karakterističnih polj sistema (5.4).)

Če iščemo plaskev S v implicitni obliki

$$S = \{v(x,y,y) = 0\},$$

lahko Pfaffovo enačbo zapišemo v analitični obliki

$$\nabla v = \mu \cdot F \qquad (5.8)$$

kjer je μ neka skalarna funkcija.

Pogoj (5.8) ravno pove, da mora biti gradient ∇v vzporeden polju F; ker je ∇v pravokoten na tangentno ravnino $T_{(x,y,z)}S$ v poljubni točki, je s tem F pravokoten na S.

Potreben pogoj za obstoj funkcije $v(x,y,z)$, ki zadošča pogoju (5.8) za dano funkcijo μ, je

$$0 = \nabla \times (\nabla v) = \nabla \times (\mu F),$$

∇v ... $\operatorname{rot}(\nabla v)$

torej

$$0 = \mu \cdot (\nabla \times F) - F \times \nabla \mu .$$

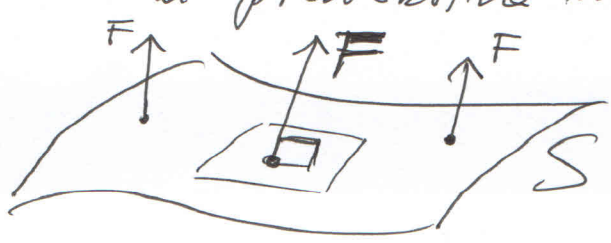
Drugi člen na desni je pravokoten na F, če pomnožimo skalarno z F, torej sledi (ker $\mu \neq 0$)

$$0 = F \cdot (\nabla \times F) = F \cdot \operatorname{rot} F . \quad (5.9)$$

Pogoj (5.9) je torej potreben za obstoj rešitve enačbe (5.8) za neko neničelno funkcijo μ.

Izkaže se, da je pogoj (5.9) tudi zadosten.

IZREK. Če vektorsko polje $F \neq 0$ na neki domeni $D \subset \mathbb{R}^3$ zadošča pogoju (5.9), potem ima Pfaffova enačba (5.8) rešitev; skozi vsako točko $(x_0, y_0, z_0) \in D$ tedaj poteka natanko ena ploskev S, ki je v vsaki točki pravokotna na polje F.



Dokaz. Direkten dokaz lahko bralec najde npr. v [F. Križanič, Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun, DZS, Ljubljana (1974), str. 502–3.].

Mi pa bomo dokaz prevedli na pogoj (5.4).

Koordinate v okolici dane točke izberimo tako, da je

$F_3 = R \neq 0$ (tretja komponenta polja F je $\neq 0$).

Vsako integralno ploskev lahko tedaj predstavimo lokalno kot graf $z = u(x,y)$.

Normalo na ploskev predstavlja vektorsko polje $\mathcal{V} = (u_x, u_y, -1)$. Pfaffova enačba torej zahteva, da sta $\mathcal{V}$ in F vzporedna.

Če pomnožimo polje F s funkcijo $-1/F_3$ (kar ne vpliva na enačbo), lahko torej predpostavimo

$$F = (a, b, -1) \qquad (5.10)$$

in ploskev $u = u(x,y)$ mora zadoščati sistemu PDE:

$$u_x = a, \quad u_y = b.$$

To je ravno sistem (5.4). Trivialen račun pokaže, da je enačba $\boxed{F \cdot \operatorname{rot} F = 0}$ ekvivalentna enačbi (5.5) za funkciji (a, b) v polju F (5.10).

Frobeniusov izrek

Oglejmo si sedaj nekoliko bolj intrinzičen pristop k reševanju sistema dveh PDE, ki se ga da pesplošiti na večje število enačb in neodvisnih spremenljivk. To pristop vodi do pomembnega rezultata v teoriji integrabilnih sistemov in foliacij, to je Frobeniusov izrek.

Zaradi enostavnosti vzemimo sistem dveh kvazilinearnih enačb:

$$\begin{cases} a_1(x,y,u)u_x + b_1(x,y,u)u_y = c_1(x,y,u) \\ a_2(x,y,u)u_x + b_2(x,y,u)u_y = c_2(x,y,u). \end{cases} \quad (5.11)$$

Vsaki od enačb je priejeno karakteristično vektorsko polje:

$$V_1 = (a_1, b_1, c_1); \quad V_2 = (a_2, b_2, c_2). \quad (5.12)$$

Vektorsko polje $V = (a, b, c)$ lahko razumemo kot parcialni diferencialni operator:

$$V = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z} = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z. \quad (5.13)$$

Ta operator deluje na poljubno C^1 funkcijo $f(x,y,z)$ s predpisom:

$$V(f) = a\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + b\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial x}. \quad (5.14)$$

Rezultat je torej funkcija spremenljivk (x,y,z).

Izraz $V(f)$ lahko razumemo kot skalarni produkt $(a,b,c)\cdot\nabla f$ vektorskega polja V ter gradienta ∇f funkcije f. Če je $\gamma(t)$ tokovnica polja V z $\gamma(0)=(x,y,z)$, je tudi

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\dot{x}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\dot{y}(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\dot{z}(0)$$
$$= (a\cdot f_x + b\cdot f_y + c\cdot f_z)(x,y,z)$$
$$= V(f)(x,y,z).$$

Torej je $V(f)$ odvod f vzdolž tokovnice polja V. (To je smerni odvod f v smeri vektorja V.)

Oglejmo si sedaj operacijo komutator dveh vektorskih polj V_1, V_2 (5.12). Komutator je definiran s predpisom:

$$[V_1, V_2](f) = V_1(V_2(f)) - V_2(V_1(f))$$

KOMUTATOR VEKTORSKIH POLJ

za poljubno gladko funkcijo f. Koeficienti polj V_1, V_2 morajo biti razreda C^1. Račun pokaže:

$$V_1(V_2(f)) = \overbrace{(a_1\partial_x + b_1\partial_y + c_1\partial_z)}^{V_1}\overbrace{(a_2 f_x + b_2 f_y + c_2 f_z)}^{V_2(f)}$$
$$= \cancel{a_1 a_{2x} f_x + a_1 b_{2x} f_y + a_1 c_{2x} f_z}$$
$$= V_1(a_2)\cdot f_x + V_1(b_2) f_y + V_1(c_2) f_z$$
$$+ a_2\cdot V_1(f_x) + b_2\cdot V_1(f_y) + c_2 V_1(f_z).$$

$$V_2(V_1(f)) = V_2(a_1) f_x + V_2(b_1) f_y + V_2(c_1) f_z$$
$$+ a_1 \cdot V_2(f_x) + b_1 \cdot V_2(f_y) + c_1 \cdot V_2(f_z) .$$

Člani v drugi vrstici obeh identitet vsebujejo 2. parcialne odvode funkcije f. Z upoštevanjem dejstva, da so mešani parcialni odvodi enaki

$$f_{xy} = f_{yx} \; ; \; f_{xz} = f_{zx} \; ; \; f_{yz} = f_{zy}$$

je lahko videti, da se pri odštetju enačb ti členi krajšajo in dobimo:

$$[V_1, V_2](f) = \left(V_1(a_2) - V_2(a_1)\right) f_x + \left(V_1(b_2) - V_2(b_1)\right) \cdot f_y$$
$$+ \left(V_1(c_2) - V_2(c_1)\right) \cdot f_z .$$

Ker to velja za vsako C^2 funkcijo f, smo dokazali naslednjo formulo za komutator:

$$(5.15) \quad [V_1, V_2] = \left(V_1(a_2) - V_2(a_1)\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(V_1(b_2) - V_2(b_1)\right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(V_1(c_2) - V_2(c_1)\right) \frac{\partial}{\partial z}$$

Recimo sedaj, da je neka ploskev S, ki je podana implicitno z enačbo $f = 0$, integralna ploskev obeh enačb v sistemu (5.11). To pomeni, da sta obe karakteristični polji V_1, V_2 tangentni na S, zato velja

$$V_1(f) = 0, \quad V_2(f) = 0 \quad \text{vzdolž ploskve } S.$$

Iz enačbe $V_1(f) = 0$ na S ter dejstva, da je tudi V_2 tangentno polje na S, sledi:

$$V_2(V_1(f)) = 0 \quad \text{vzdolž } S.$$

Isti sklep ponovimo v drugem vrstnem redu:

$$V_1(V_2(f)) = 0 \quad \text{vzdolž } S.$$

Torej velja tudi

$$[V_1, V_2](f) = 0 \quad \text{vzdolž } S.$$

Odtod sledi, da je komutator $[V_1, V_2] = W$ vektorsko polje, ki je tangentno na S.

Dokazali smo torej:

IZREK: Za vsako integralno ploskev S sistema enačb (5.11) je komutator $[V_1, V_2]$ karakterističnih polj (5.12) tangentno polje na S.

Recimo sedaj, da sta polji V_1, V_2 linearno neodvisni v neki točki. (Če sta enačbi (5.11) neodvisni, velja to v večini točk.) Torej mora biti $[V_1, V_2]$ linearna kombinacija polj V_1, V_2:

$$[V_1, V_2] = \alpha \cdot V_1 + \beta \cdot V_2 . \quad (5.16)$$

(α, β sta funkciji.)

Definicija. Linearno neodvisni vektorski polji V_1, V_2 na domeni $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ določata **involutiven sistem ravnin** (ali **polje ravnin**)

$$(5.17) \quad \Sigma_{(x,y,z)} = \mathbb{R} \cdot V_1(x,y,z) + \mathbb{R} \cdot V_2(x,y,z) \subset T_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3,$$

če je izpolnjen pogoj (5.16) (torej, če je komutator $[V_1, V_2]$ linearna kombinacija polj V_1 in V_2).

Involutivnost polja ravnin je neodvisna od izbire konkretnih polj V_1, V_2, ki definirata ta sistem. To vidimo takole. Naj bosta W_1, W_2 neodvisni vektorski polji, ki definirata isto polje ravnin kot V_1, V_2. Torej sta W_1, W_2 linearni kombinaciji

$$W_1 = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$$
$$W_2 = \beta_1 V_1 + \beta_2 V_2$$

kjer so $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ neke funkcije. Preprost račun pokaže, da je tedaj

$$[W_1, W_2] = c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 [V_1, V_2]$$

za neke funkcije c_1, c_2, c_3. Če velja (5.16), lahko $[V_1, V_2]$ ~~izrazimo kot kombinacijo~~ in zato tudi $[W_1, W_2]$ izrazimo kot kombinacijo polj V_1, V_2. Sledi, da je

$$[W_1, W_2] = \tilde{\alpha} W_1 + \tilde{\beta} \cdot W_2$$

Torej sta polji W_1, W_2 tudi v involuciji.

Sedaj lahko dokažemo naslednji ~~pa~~ izrek, ki je poseben primer Frobeniusovega izreka.

IZREK (Frobenius, poseben primer).
Sistem dveh neodvisnih kvazilinearnih enačb (5.11) je integrabilen (v smislu, da skozi vsako točko poteka natanko ena integralna ploskev) natanko tedaj, ko je involutiven (to je, pripejeni karakteristični vektorski polji V_1, V_2 (5.12) sta v involuciji).

Dokaz. Če je sistem integrabilen, poteka skozi poljubno točko (x,y,z) neka integralna ploskev S. Videli smo, da je vzdolž take ploskve komutator $[V_1, V_2]$ linearna kombinacija V_1 in V_2. Torej je V_1, V_2 involutiven par vzdolž S; ker je unija teh ploskev enaka Ω, je V_1, V_2 involutiven par na Ω.

Obratno, denimo sedaj, da je V_1, V_2 involutiven par. Enačbi v sistemu (5.11) sta neodvisni, kar pomeni

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0.$$

Velja:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ V_1 & V_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ W_1 & W_2 \end{matrix}$$

Vektorski polji

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= (1,0,a) = \partial_x + a\cdot\partial_z \\ W_2 &= (0,1,b) = \partial_y + b\cdot\partial_z \end{aligned}\right\} \qquad (5.18)$$

sta linearni kombinaciji polj V_1, V_2. Ker sta V_1, V_2 v involuciji, sta tudi W_1, W_2 v involuciji.

Preprost račun pokaže

$$[W_1, W_2] = \left(b_x + a\cdot b_z - a_y - b a_z\right)\cdot\partial_z . \qquad (5.19)$$

To polje je linearna kombinacija polj W_1, W_2. Sledi, da je to lahko samo <u>trivialna</u> linearna kombinacija, torej velja $[W_1, W_2] = 0$ oziroma

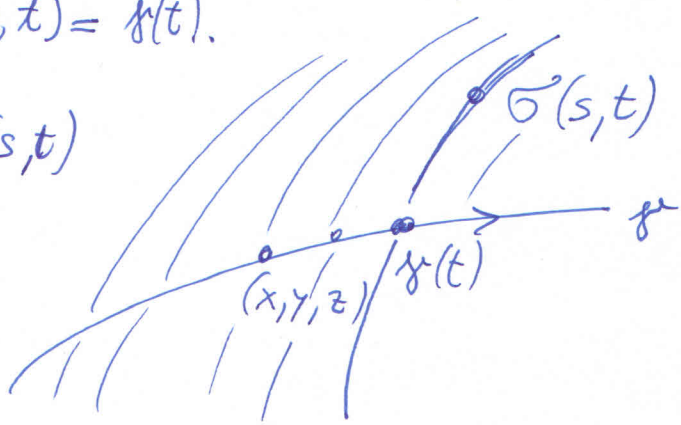
$$b_x + a b_z = a_y + b a_z .$$

To je ravno enačba (5.5). Vemo že, da ta identiteta zagotavlja obstoj resitev (integralnih ploskev) skozi vsako točko, torej je sistem (5.11) integrabilen.

II. 5.

V praksi sestavimo integralne ploskve S sistema (5.11) tako, da najprej poteg nemo integralno krivuljo $\gamma(t)$ enega od karakterističnih polj, npr. V_1, nato pa skozi vsako točko $\gamma(t)$ napeljemo tokovnico $\sigma(s,t)$ drugega polja, ki zadošča začetnemu pogoju $\sigma(0,t) = \gamma(t)$.

Preslikava $(s,t) \mapsto \sigma(s,t)$ je parametrizacija integralne ploskve.



V posebnem primeru, ko polji V_1, V_2 <u>komutirata</u> v smislu, da je $[V_1, V_2] \equiv 0$, tudi njuna tokova φ_t, ψ_s komutirata:

$$\psi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \psi_s .$$ (Velja tudi obratno.)

V tem primeru so krivulje

$$t \mapsto \psi_s \circ \varphi_t(x,y,z) = \varphi_t \circ \psi_s(x,y,z)$$

integralne krivulje polja V_1 za vsak s, krivulje

$$s \mapsto \psi_s \circ \varphi_t(x,y,z)$$

pa so integralne krivulje polja V_2 za vsak t.