II.4. SPLOŠNA (NELINEARNA) PDE 1. REDA.

Iščemo funkcijo $u(x,y)$ na neki domeni v $\mathbb{R}^2$, ki zadošča enačbi

$$F(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y)) = 0 \qquad (4.1).$$

Uvedli bomo oznake

$$z = u, \quad p = u_x, \quad q = u_y.$$

S temi oznakami enačbo (4.1) zapišemo v obliki

$$F(x,y,z,p,q) = 0. \qquad (4.2)$$

Za fiksno točko $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ enačba (9) določa zvezo med p in q. V splošnem lahko pričakujemo, da je množica rešitev neka krivulja

$$C_{(x,y,z)} \subset \mathbb{R}^2_{(p,q)}. \qquad (4.3)$$

Zapišimo jo parametrično:

$$p = p(\lambda), \quad q = q(\lambda); \quad \lambda \text{ nek parameter.}$$

(Lahko bi tudi lokalno izrazili $q = q(p)$ ali $p = p(q)$.). Za vsako izbiro λ dobimo (tangentno) ravnino v $\mathbb{R}^3$, pripeto v (x,y,z), z enačbo

$$\Sigma_\lambda : \; dz = p(\lambda).dx + q(\lambda).dy. \qquad (4.4)$$

$\Sigma_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ Vsaka integralna ploskev skozi (x,y,y) ima tangento Σ_λ za nek λ.

Podobno kot v kvazilinearnem primeru želimo definirati karakteristično vektorsko polje in karakteristične krivulje kot krivulje, ki so tangentne na poljubno integralno ploskev $S: z = u(x,y)$ enačbe (4.1).

V ta namen si ponovno oglejmo kvazilinearno enačbo:

$$F(x,y,z,p,q) = a(x,y,z)\cdot p + b(x,y,z)\cdot q - c(x,y,z)$$
$$= (a,b,c)\circ(p,q,-1) = 0. \qquad (4.5)$$

Za vsako fiksno točko (x,y,z) je to linearna enačba za (p,q) in množica rešitev $C_{(x,y,z)} \subset \mathbb{R}^2_{(p,q)}$ je premica.

Za vsako točko $(p(\lambda), q(\lambda)) \in C_{(x,y,z)}$ enačba (4.5) zahteva, da tangentna ravnina Σ_λ (4.4) vsebuje vektor $\vec{V} = (a,b,c)$. Ko spreminjamo λ, se ravnine Σ_λ vrtijo okoli vektorja $\vec{V}$ in velja:

$$\bigcap_\lambda \Sigma_\lambda = \mathbb{R}\cdot\vec{V} = \text{karakteristična premica, določena z vektorjem } \vec{V}_{(x,y,z)}.$$

(*) Karakteristična premica je torej enolično določena kot premica, na kateri je 3. komponenta dz v (4.4) neodvisna od parametra λ.

II.20

Drugače povedano: če je t parameter na karakteristični premici, lahko pišemo

$$dx = h \cdot dt, \quad dy = k \cdot dt,$$

kjer je (h, k) smerni vektor projekcije karakteristične premice v $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$.

Tedaj je $\quad dz = (p(\lambda) \cdot h + q(\lambda) \cdot k) \cdot dt.$

Smer (h, k) je karakteristična, če je

$$0 = p'(\lambda) \cdot h + q'(\lambda) k . \qquad (4.6)$$

~~Ali~~ Z odvajanjem enačbe (4.5) po λ (ki nastopa v p in q) dobimo tudi

$$0 = a \cdot p'(\lambda) + b \cdot q'(\lambda) . \qquad (4.7)$$

Iz primerjave enačb (4.6) in (4.7) zaključimo, (ker je $(p'(\lambda), q'(\lambda)) \neq 0$), da sta vektorja (h, k) ter (a, b) kolinearna; to ravno pomeni, da je karakteristična smer v $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ določena z vektorjem (a, b). Tretjo komponento c pa dobimo ~~kot~~ iz enačbe (4.4) z upoštevanjem (4.5): $\quad c = a \cdot p + b \cdot q .$

V primeru nelinearne enačbe (9) je za fiksen (x,y,z) zveza med p in q nelinearna in presek ravnin Σ_λ (10) v splošnem ni več premica.

Do enačbe karakteristik pridemo z naslednjim razmislekom. Fiksirajmo vrednost parametra $\lambda = \lambda_0$ na krivulji $C_{(x,y,z)} \subset \mathbb{R}^2_{(p,q)}$ (4.3).
S tem smo fiksirali točko $p_0 = p(\lambda_0)$, $q_0 = q(\lambda_0)$ v $\mathbb{R}^2$.

Sedaj določimo smer $(h,k) \in \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ karakteristične premice (glede na točko $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ter $(p_0,q_0) \in \mathbb{R}^2$) z zahtevkom:

(**) tretja komponenta dz tangentne ravnine (4.4) je vzdolž premice $dx = h\,dt$, $dy = k\,dt$ infinitezimalno neodvisna od λ; to je, njen odvod po λ pri $\lambda = \lambda_0$ je enak 0:

$$0 = p'(\lambda_0)\cdot h + q'(\lambda_0)k \,. \qquad (4.8)$$

Z odvajanjem po λ v $F(x,y,z,p(\lambda),q(\lambda)) = 0$ pa dobimo:

$$0 = p'(\lambda_0)\cdot\frac{\partial F}{\partial p} + q'(\lambda_0)\cdot\frac{\partial F}{\partial q} \,. \qquad (4.9)$$

Ob predpostavki $(p'(\lambda_0), q'(\lambda_0)) \neq (0,0)$ zaključimo tako kot prej, da iz enačb (4.8), (4.9) sledi kolinearnost vektorjev (h,k) ter (F_p, F_q).

To pomeni, da sta (F_p, F_q) prvi dve koordinati karakterističnega ~~vektorskega~~ vektorja V.

Karakteristični enačbi za $x(t)$, $y(t)$ sta torej

(4.10) $\qquad \dot{x} = F_p\,, \quad \dot{y} = F_q \qquad$ (funkcije (x,y,z,p,q))

Iz enačbe (4.4) dobimo tretjo komponento:

(4.11) $\qquad \dot{z} = p \cdot \dot{x} + q \cdot \dot{y} = p \cdot F_p + q \cdot F_q\,.$

V kvazilinearnem primeru (4.5) imamo

$$F_p = a\,,\; F_q = b\,;\quad pF_p + qF_q = pa + qb = c\,.$$

iz enačbe (4.5).

Ker so vse te funkcije neodvisne od (p,q), dobimo s tem karakteristično vektorsko polje $V(x,y,z) = (a,b,c)$, na $\mathbb{R}^3$, ki je neodvisno od (p,q).

V nelinearnem primeru pa so funkcije F_p, F_q ter $pF_p + qF_q$ odvisne tudi od (p,q).

Zato moramo sistem enačb (4.10), (4.11) dopolniti še z enačbami za $(\dot{p}, \dot{q}) \in \mathbb{R}^2$. (Prolongacija sistema.)

II.23

Z odvajanjem enačbe (4.1) dobimo:

$$\left(F_x + F_z \cdot u_x\right) + \left(F_p \cdot p_x + F_q \cdot q_x\right) = 0$$

$$\left(F_y + F_z \cdot u_y\right) + \left(F_p \cdot p_y + F_q \cdot q_y\right) = 0 .$$

Z upoštevanjem $u_x = p$, $u_y = q$ ter zveze $p_y = (u_x)_y = (u_y)_x = q_x$ sledi iz zgornjih dveh enačb (ob upoštevanju (4.10) in (4.11)):

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= p_x \cdot \dot{x} + p_y \cdot \dot{y} = p_x \cdot F_p + p_y \cdot F_q \\
&= p_x \cdot F_p + q_x \cdot F_q \\
&= -\left(F_x + p \cdot F_z\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= q_x \cdot \dot{x} + q_y \cdot \dot{y} = q_x \cdot F_p + q_y \cdot F_q \\
&= p_y \cdot F_p + q_y \cdot F_q \\
&= -\left(F_y + q \cdot F_z\right)
\end{aligned}$$

S tem smo dobili <u>karakteristični</u> <u>sistem</u> NDE v <u>faznem prostoru</u> $\mathbb{R}^5_{(x,y,z,p,q)}$ (Boltzmann, Poincaré, Gibbs):

$$(4.12)\quad \begin{cases} \dot{x} = F_p \\ \dot{y} = F_q \\ \dot{z} = p\cdot F_p + q\cdot F_q \\ \dot{p} = -F_x - p\cdot F_z \\ \dot{q} = -F_y - qF_z \end{cases}$$

Rešitve $\lambda(t) = (x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)) = (\gamma(t), p(t), q(t)) \in \mathbb{R}^5$ so <u>karakteristike</u> PDE (4.1).

Projekcija $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ je <u>sled karakteristike</u> v <u>konfiguracijskem prostoru</u> $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ (karakterist. projekcija)

<u>OPOMBA</u>: Karakteristika $\lambda(t)$ ter njena sled $\gamma(t)$ je odvisna od začetnega pogoja $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \in \mathbb{R}^5$. Družina karakteristik sestavlja fazni portret v $\mathbb{R}^5$, sledi γ v $\mathbb{R}^3$ pa lahko imajo presečišča.

V kvazilinearnem primeru so $\gamma(t)$ odvisne <u>samo</u> od $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, ne pa tudi od (p_0, q_0). Zadnjih dveh enačb za $\dot{p}, \dot{q}$ v (4.12) v kvazilin. primeru ne potrebujemo.

OPOMBA:

Funkcija $F(x,y,z,p,q)$ je integral sistema NDE (15), to je, F je konstantna na vsaki integralni krivulji, kar vidimo takole:

$$\frac{d}{dt}F\big(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)\big) =$$
$$= F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} + F_z \cdot \dot{z} + F_p \cdot \dot{p} + F_q \cdot \dot{q}$$
$$= F_x \cdot F_p + F_y \cdot F_q + F_z\,(pF_p + qF_q) + F_p(-F_x - pF_z) + F_q \cdot (-F_y - qF_z)$$
$$= 0.$$

Geometrijska interpretacija:

- točka (x,y,z,p,q), ki zadošča enačbi (4.2), predstavlja točko $(x,y,z) \in \mathbb{R}$ ter tangentno ravnino
$$dz = p \cdot dx + q \cdot dy,$$
oziroma $$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$
Tu so (ξ, η, ζ) koordinate na tangentni ravnini.

- krivulja $(x(s), y(s), z(s), p(s), q(s))$, ki zadošča enačbi (4.2) za vsak s, se imenuje integralna ~~pas~~ krivulja, če velja
$$\frac{dz}{ds}(s) = p(s) \cdot \frac{dx}{ds} + q(s) \cdot \frac{dy}{ds}, \quad \forall s.$$
Integralna ~~pas~~ krivulja je karakteristična, če predstavlja integralno krivuljo karakterističnega sistema (4.12).

Druga terminologija: $\begin{cases} \text{integralni trak (strip)} \\ \text{karakteristični trak (characteristic strip)} \end{cases}$.

II.26

- Parametrično podana ploskev

$$R(s,t) = \big(x(s,t), y(s,t), z(s,t), p(s,t), q(s,t)\big),$$

ki zadošča enačbi (4.2) za vsak (s,t), je <u>integralna ploskev enačbe</u> (4.2), če velja

$$(4.13) \quad \begin{cases} z_s = p\cdot x_s + q\cdot y_s \\ z_t = p\cdot x_t + q\cdot y_t \end{cases}$$

oziroma v matrični obliki

$$(4.14) \quad \begin{pmatrix} z_s \\ z_t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A\cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Če je $\det A \neq 0$, lahko rešimo enačbi $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ na

$$\begin{cases} s = s(x,y), \\ t = t(x,y). \end{cases}$$

Če pomnožimo enačbo (4.13) na levi z A^{-1}, dobimo

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} z_s \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & t_x \\ s_y & t_y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} z_s \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_s\cdot s_x + z_t\cdot t_x \\ z_s\cdot s_y + z_t\cdot t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix}$$

Torej funkcija $u(x,y) = z\big(s(x,y), t(x,y)\big)$ zadošča:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q, \quad F(x,y,u(x,y), u_x, u_y) = 0}$$

POVZETEK:

Iz zgornje analize sledi, da pridemo do rešitev enačbe (4.1), tj. do integralnih ploskev $z=u(x,y)$, takole:

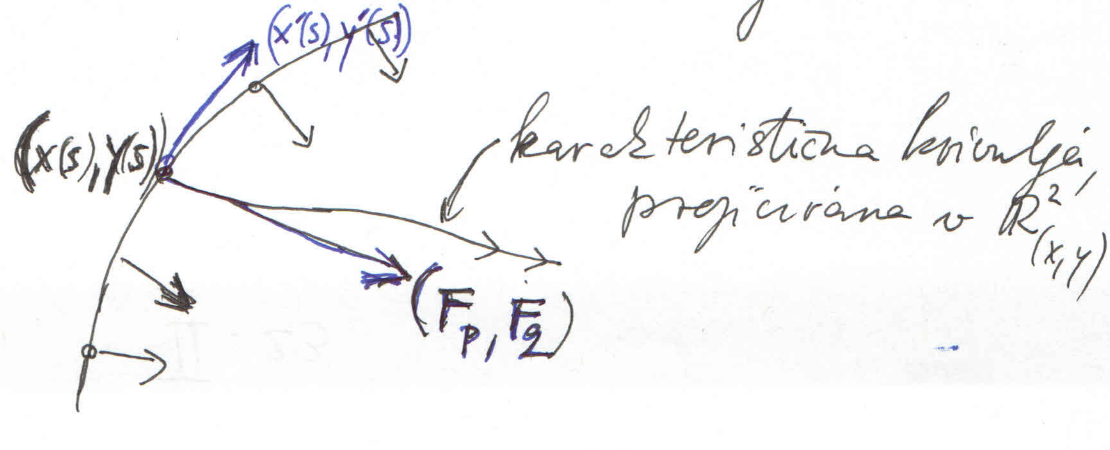
1° Izberemo nekarakteristično integralno krivuljo

$$\Lambda : \lambda(s) = (\underbrace{x(s), y(s), z(s)}_{\gamma(s)\in\mathbb{R}^3}, p(s), q(s)) \subset \mathbb{R}^5$$

tako da velja:

$$(4.15)\quad \begin{cases} F\big(x(s), y(s), z(s), p(s), q(s)\big) = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial z}{\partial s} = p\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s} + q\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s} & (2) \\ \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \\ F_p & F_q \end{pmatrix} = \dfrac{\partial x}{\partial s}\cdot F_q - \dfrac{\partial y}{\partial s}\cdot F_p \neq 0 & (3) \end{cases}$$

Prvi dve enačbi povesta, da gre za integralno krivuljo, zadnji pogoj pa, da je njena projekcija v $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ transverzalna na projekcijo karakterističnega polja, to je, na vektorsko polje (F_p, F_q), ki določa smer karakterističnih krivulj.

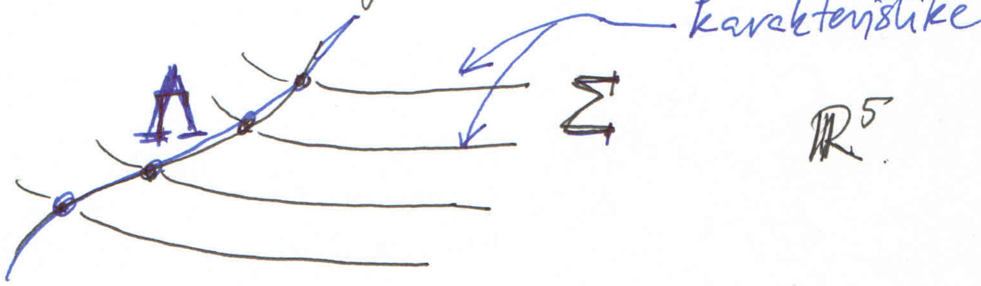


Izbor krivulje Λ v $\mathbb{R}^5$, ki zadošča (4.15) določa Cauchyev (začetni) pogoj za enačbo (4.1).

② Sedaj za vsako začetno točko na Λ rešimo karakteristični sistem NDE (4.12). Tako dobimo parametrizirano ploskev:

$$\Sigma: \big(x(s,t), y(s,t), z(s,t), p(s,t), q(s,t)\big) \subset \mathbb{R}^5.$$

Pri $t=0$ imamo $x(s,0)=x(s), \dots, q(s,0)=q(s)$, torej točko na krivulji $\Lambda \subset \mathbb{R}^5$.



Projekcija $S = \pi(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ je ploskev $\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big)$, ki vsebuje krivuljo

$\Gamma = \pi(\Lambda)$ (pri $t=0$).

Iz pogoja (3) v (4.15) vidimo, da lahko S predstavimo kot graf $z = u(x,y)$.

II. 29

Trdimo, da tako dobljena ploskev $S: z = u(x,y)$ reši PDE (4.1). Za dokaz zadošča preveriti, da je izpolnjen sistem (4.13) za vsak (s,t).

- Pri $t = 0$ je prva enačba v (4.13) izpolnjena v skladu z izborom krivulje Λ.
- Druga enačba v (4.13) sledi neposredno iz definicije karakterističnega sistema.
- Preveriti še, da prva enačba v (4.13) velja za vsak (s,t). Definiramo funkcijo

$$A(s,t) = z_s(s,t) - p(s,t)\cdot x_s(s,t) - q(s,t)\cdot y_s(s,t).$$

Velja: $A(s,0) = z_s(s,0) - p(s,0)\cdot x_s(s,0) - q(s,0)\cdot y_s(s,0) = 0.$

Iz (4.12) in (4.13) dobimo:

$$\begin{aligned}
A_t &= z_{st} - p_t x_s - q_t y_s - p\cdot x_{st} - q\cdot y_{st} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\underbrace{\left(z_t - p x_t - q y_t\right)}_{=0} + p_s \underbrace{x_t}_{F_p} + q_s \underbrace{y_t}_{F_q} - q_t y_s - p_t x_s \\
&= p_s \cdot F_p + q_s \cdot F_q + x_s\left(F_x + pF_z\right) + y_s\cdot\left(F_y + q\cdot F_z\right) \\
&= \underbrace{F_s}_{0} - F_z\cdot z_s + F_z\cdot\left(p\cdot x_s + q y_s\right) \\
&= -F_z\left(z_s - p x_s - q y_s\right) = -F_z\cdot A.
\end{aligned}$$

Torej $A(s,t)$ zadošča navadni linearni diferencialni enačbi

$$A_t = -F_z \cdot A \; .$$

ter začetnemu pogoju $A(s,0)=0$.

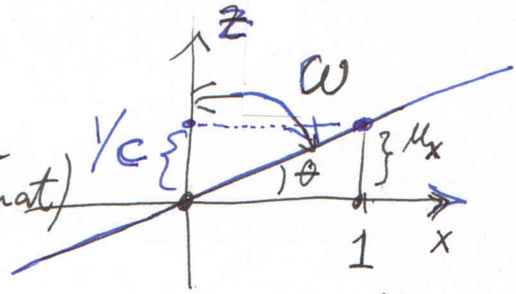
Tudi trivialna rešitev $A \equiv 0$ zadošča isti enačbi. Iz enoličnosti rešitev sledi

$$A(s,t) \equiv 0 .$$

Torej je S, dobljena ~~s to~~ z opisano metodo, res integralna ploskev, in $u(x,y)$ je rešitev PDE ~~(8)~~ (4.1) ∎

PRIMER: Enačba geometrijske optike: $(c > 0)$.

(~~19~~) (4.16) $\quad c^2 \cdot (u_x^2 + u_y^2) = 1$



Geometrijski pomen: $u_y = 0$ (izbira koordinat)

$$\operatorname{tg}\theta = |u_x| = \frac{1}{c}$$

$\theta = \operatorname{Arctg} 1/c$ = kot med tangentno ~~premico~~ ravnino na graf rešitve ter ~~x-osjo~~ $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$.

Rešitev enačbe (4.16) je ploskev $S: z = u(x,y)$, katere tangentna ravnina v vsaki točki oklepa kot $\operatorname{Arctg} 1/c$ z ravnino $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$.

ω = kot med tangento na graf in z-osjo

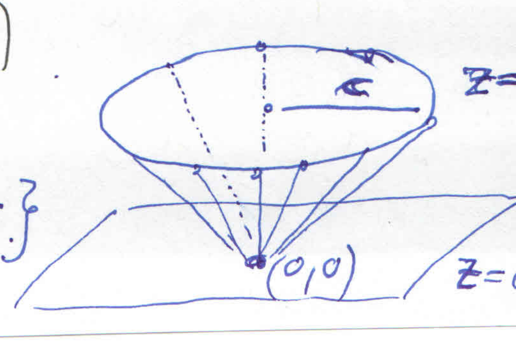
$\omega = \pi/2 - \theta$.

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{|u_x|} = c \,; \quad \boxed{\omega = \operatorname{Arctg} c}$$

Rešitev: $\quad F = \frac{1}{2}(c^2p^2 + c^2q^2 - 1) = 0; \quad p = u_x,\ q = u_y$.

karakteristni sistem
$$\begin{cases} \dot{x} = c^2 p & (= F_p) \\ \dot{y} = c^2 q & (= F_q) \\ \dot{z} = c^2p^2 + c^2q^2 = 1 & (= pF_p + qF_q) \\ \dot{p} = 0 & (= -F_x - pF_z) \\ \dot{q} = 0 & (= -F_y - qF_z) \end{cases}$$

Mongeov stožec: $\{(\dot{x}, \dot{y}, 1) : \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = c^2\}$



Začetna krivulja:

$\Gamma: \ x = f(s), \ y = g(s), \ z = h(s).$ v $\mathbb{R}^3$.

Dopolnimo v $\Lambda \subset \mathbb{R}^5$ z izborom funkcij $p = \phi(s)$, $q = \psi(s)$, tako da veljata enačbi:

$$(4.17)\ \left(\cancel{4.16}\right) \quad \begin{cases} h'(s) = \phi(s) \cdot f'(s) + \psi(s) \cdot g'(s) \\ \phi(s)^2 + \psi(s)^2 = \dfrac{1}{c^2} \qquad (F = 0). \end{cases}$$

V prvi vrstici imamo skalarni produkt

$$(\phi(s), \psi(s)) \cdot (f'(s), g'(s)) = h'(s).$$

Če je $f'^2 + g'^2 < c^2 h'^2$, ni rešitev.
(To je tedaj, ko Γ oklepa kot $< \omega$ z z-osjo.)

Če je $f'^2 + g'^2 > c^2 h'^2$, obstajata dve rešitvi sistema (~~4.17~~). S tem dobimo dva Cauchyeva pogoja Γ_1, Γ_2, ki se projicirata na dano krivuljo $\gamma \subset \mathbb{R}^3$. V primeru enakosti je natanko ena rešitev, ki je vzporedna vektorju $(f'(s), g'(s))$.

II. 33

Poseben primer: $x = f(s)$, $y = g(s)$, $z = 0$: Γ.

Enačbi za $p = \phi(s)$, $q = \psi(s)$:

$$0 = \phi \cdot f' + \psi \cdot g' \iff (\phi, \psi) \circ (f', g') = 0$$

$$\phi^2 + \psi^2 = \frac{1}{c^2}.$$

Torej je v vsaki točki s vektor $(\phi(s), \psi(s))$ pravokoten na hitrostni vektor $(f'(s), g'(s))$ in je dolžine $\frac{1}{c}$.

Rešitvi se razlikujeta za znak.

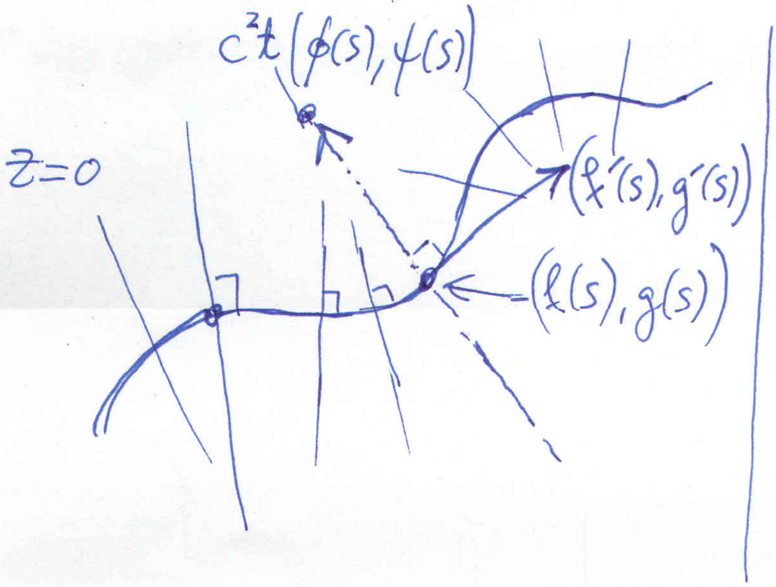
Integralna ploskev:

$$\begin{cases} x = f(s) + c^2 t\, \phi(s) \\ y = g(s) + c^2 t\, \psi(s) \\ z = t \\ p = \phi(s) \\ q = \psi(s) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix}_{t=0} = \begin{vmatrix} f'(s) & c^2\phi(s) \\ g'(s) & c^2\psi(s) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Torej lahko rešimo enačbi na

$$\begin{cases} s = s(x, y) \\ t = t(x, y) \end{cases}$$



$z = t(x, y) = u(x, y)$ je rešitev Cauchyevega problema.