VI. STURM-LIOUVILLEOV PROBLEM

VI. 1. Uvod

Pri reševanju robnih problemov za PDE 2. reda po Fourierovi metodi (z iskanjem razcepnih rešitev ter razvojem splošne rešitve v Fourierovo vrsto) naletimo na naslednji problem:

Iščemo rešitev $v \in C^2([a,b])$ linearne diferencialne enačbe 2. reda oblike

$$L(v) + \lambda \cdot r\, v = 0 \quad \text{na } [a,b], \tag{1.1}$$

kjer je L linearen diferencialni operator 2. reda, λ število in $r > 0$ dana zvezna funkcija na $[a,b]$, tako da v zadošča dvema neodvisnima robnima pogojema v krajiščih intervala:

$$\begin{cases} U_1(v) = \alpha_1 v(a) + \beta_1 v'(a) + \gamma_1 v(b) + \delta_1 v'(b) = 0 \\ U_2(v) = \alpha_2 v(a) + \beta_2 v'(a) + \gamma_2 v(b) + \delta_2 v'(b) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Definicija

Operator L se imenuje <u>Sturm-Liouvillev</u>, če je oblike

$$L(v) = (p v')' + q \cdot v = p v'' + p' v' + q v \tag{1.3}$$

kjer ~~sekce~~ so $p, p', q \in C([a,b])$ zvezne funkcije na $[a,b]$ in je $p \geq 0$.

Operator L je <u>nesingularen</u>, če je $p(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$.

<u>PRIMER</u>: $L(v) = v''$ $\quad (p=1, q=0)$

$r = 1$

$$L(v) + \lambda v = v'' + \lambda v = 0$$

Robni pogoj: $v(a) = v(b) = 0$.

V poglavju <u>IV</u> smo videli, da so rešitve

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2; \quad v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{b-a}\cdot(x-a)\right).$$

Lastne vrednosti λ_n sestavljajo naraščajoče zaporedje

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots; \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

Pripadajoče lastne funkcije $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ so poln ortogonalen sistem v prostoru $L^2([a,b])$.

Videli bomo, da podoben rezultat velja za splošen Sturm-Liouvillev problem.

VI.3

<u>Trditev</u>. Vsako nesingularno linearno diferencialno enačbo 2. reda lahko (po množenju s primerno izbrano funkcijo) zapišem v Sturm-Liouvillovi obliki.

<u>Dokaz</u>. Recimo, da je naša enačba

$$M(v) = A.v'' + B.v' + Cv = F$$

kjer so $A>0$, B, C, F zvezne funkcije na $[a,b]$. (Pogoj $A>0$ pomeni, da je enačba nesingularna.)

Definiramo funkcijo

$$p(x) = e^{\int_a^x \frac{B(t)}{A(t)}dt} \quad ; \quad x \in [a,b].$$

Tedaj je p zvezno odvedljiva in

$$p'(x) = p(x) \cdot \frac{B(x)}{A(x)}.$$

Če pomnožimo enačbo z p/A, dobimo:

$$p.v'' + \frac{p.B}{A}.v' + \frac{p.C}{A} = \frac{p.F}{A}.$$

Ker je $\frac{p.B}{A} = p'$, lahko enačbo zapišemo v SL-obliki:

$$(pv')' + qv = f,$$

kjer je $q = pC/A$ in $f = pF/A$.

VI.4

V praksi se najpogosteje obravnava naslednji <u>reguleren</u> <u>Sturm-Liouvillev</u> <u>problem</u> z <u>razcepnimi</u> <u>robnimi</u> <u>pogoji</u>:

$$(p \cdot v')' + q \cdot v + \lambda \cdot r v = 0 \qquad (1.4)$$

$$(p > 0,\ r > 0 \text{ na } [a, b])$$

$$\left.\begin{aligned} B_a(v) &= \alpha \cdot v(a) + \beta \cdot v'(a) = 0 \\ B_b(v) &= \gamma \cdot v(b) + \delta \cdot v'(b) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

Ta problem bomo imenovali <u>reguleren</u> <u>SL-problem</u>.

Iščemo vrednosti $\lambda \in \mathbb{R}$, pri katerih obstajajo netrivialne rešitve v.

<u>Periodičen</u> ~~reguleren~~ <u>SL-problem</u> dobimo tako, da robni pogoj (1.5) nadomestimo s pogojem

$$\left.\begin{aligned} v(a) &= v(b) \\ v'(a) &= v'(b) \end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

<u>Singularen SL-problem</u> je problem, v katerem je SL-operator $L(v) = (pv')' + qv$ <u>singularen</u> v kakšni točki $x_0 \in [a,b]$:

$$p(x_0) = 0.$$

Najpogosteje se za singularno točko vzame eno od krajišč intervala.

<u>PRIMER</u>. Naj bo $\nu \geq 0$. Enačba

$$x^2 \cdot w'' + x \cdot w' + (x^2 - \nu^2) \cdot w = 0$$

na nekem intervalu $x \in [0, a]$ se imenuje <u>Besselova diferencialna enačba</u> <u>reda</u> ν.

Če delimo enačbo z $\frac{x}{\sqrt{\lambda}} > 0$ za neko konstanto $\lambda > 0$, dobimo Sturm-Liouvilleovo enačbo

$$(xv')' + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x^2}\right) v = 0$$

Tedaj je $p(x) = x$, $q(x) = -\frac{\nu^2}{x^2}$, $r = 1$; singularnost pri $x = 0$.

Enačbo običajno obravnavamo na končnem intervalu $x \in [0, b]$ s pogoji $v(b) = 0$, $\limsup_{x \to 0} v(x) < +\infty$.

2. Elementarne lastnosti regularnih SL-operatorjev.

Naj bo

$$(2.1) \qquad L(v) = (p \cdot v')' + q v \quad , \quad x \in [a, b]$$

SL-operator in $p > 0$ na $[a, b]$.

Dodajmo še robne pogoje (1.5):

$$(2.2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} B_a(v) = \alpha \cdot v(a) + \beta \cdot v'(a) = 0 \\ B_b(v) = \gamma \cdot v(b) + \delta \cdot v'(b) = 0 \end{array} \right\}$$

$\boxed{\text{Definicija:}}$ Domena $\mathcal{D}_L$ SL-operatorja je množica

$$(2.3) \qquad \mathcal{D}_L = \{ v \in C^2([a,b]) : B_a(v) = 0, \ B_b(v) = 0 \}.$$

OPOMBA. $\mathcal{D}_L$ je povsod gosta podmnožica prostora $L^2([a,b])$. Torej je $L : \mathcal{D}_L \longrightarrow C([a,b])$ neomejen, gosto definiran linearen operator na $L^2([a,b])$.

OPOMBA. Pri obravnavi periodičnega SL-problema z robnimi pogoji (1.6) definiramo domeno takole:

$$(2.4) \qquad \mathcal{D}_L = \left\{ v \in C^2([a,b]) : \begin{array}{l} v(a) = v(b) \\ v'(a) = v'(b) \end{array} \right\}.$$

Regularen SL-problem z utežjo r: $\left\{\begin{array}{l}\text{Naj bo } L \text{ ~~regular~~} \\ \text{regularen} \\ \text{SL-operator}\end{array}\right.$

Dana je pozitivna zvezna funkcija $r>0$, $r\in C([a,b])$. Iščemo števila λ, za katera obstaja netrivialna rešitev problema

$$L(v)+\lambda\cdot r\cdot v=0, \quad v\in \mathcal{D}_L . \qquad (2.5)$$

Tak λ se imenuje <u>lastna vrednost z utežjo r</u> SL-problema, v pa je <u>lastna funkcija</u>.

Uvedemo prostor

$$L^2_r([a,b])=\Big\{ f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ merljiva funkcija},$$
$$\|f\|_r^2=\int_a^b |f|^2\cdot r\cdot dx < +\infty \Big\}.$$

Ker je $r>0$ zvezna, obstajata konstanti $C>c>0$, da je

$$0<c\leq r(x)\leq C, \quad \forall x\in[a,b].$$

Od tod sledi $L^2([a,b])=L^2_r([a,b])$

in

$$c\cdot\|f\|^2\leq\|f\|_r^2\leq C\cdot\|f\|^2$$

Pri tem je $\|f\|^2=\int_a^b |f(x)|^2dx$ neutežena L^2-norma.

VI.8.

<u>Trditev</u> Naj bo $L(v) = (p \cdot v')' + q \cdot v$ Sturm-Liouvillev operator in $u, v \in C^2([a,b])$. Tedaj veljata naslednji identiteti:

$$u \cdot L(v) - v \cdot L(u) = \left[p \cdot (uv' - u'v)\right]' \qquad (2.6)$$

(Lagrangeeva identiteta)

$$\int_a^b \left(u \cdot L(v) - v \cdot L(u)\right) dx = p \cdot (uv' - vu')\Big|_a^b \qquad (2.7)$$

(Greenova identiteta).

<u>Dokaz</u>: $u \cdot L(v) - v \cdot L(u) =$

$$= u(pv'' + p'v' + qv) - v(pu'' + p'u' + qu)$$

$$= p \cdot (uv'' - u''v) + p'(uv' - u'v)$$

$$= \left(p \cdot (uv' - u'v)\right)' \ldots \quad (2.6)$$

Drugo identiteto (2.7) dobimo iz (2.6) z integracijo ter upoštevanjem osnovnega izreka integralnega računa.

<u>Trditev</u>. SL-operator $Lv = (pv')' + qv$ je <u>simetričen</u> (oziroma <u>sebi-adjungiran</u>) na $\mathcal{D}_L$:

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2([a,b])} = \langle u, Lv\rangle_{L^2([a,b])} \tag{2.8}$$

za vsak par $u, v \in \mathcal{D}_L$.

Pri periodičnem pogoju (2.4) to velja ob dodatni predpostavki

$$p(a) = p(b) \tag{2.9}$$

<u>Dokaz</u>: $\langle u, Lv\rangle - \langle Lu, v\rangle = \int_a^b (u \cdot Lv - v \cdot Lu)\, dx$

$= \left[p \cdot (uv' - u'v)\right]_a^b$ po identiteti (2.7).

Pri pogojih (2.4) & (2.9) je rezultat očitno 0.

Recimo sedaj, da u, v zadoščata (2.2). Tedaj

$$B_a(u) = \alpha \cdot u(a) + \beta \cdot u'(a) = 0$$
$$B_a(v) = \alpha \cdot v(a) + \beta \cdot v'(a) = 0.$$

Torej je $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ netrivialni vektor matrike $\begin{pmatrix} u(a), & u'(a) \\ v(a), & v'(a) \end{pmatrix}$, zato $0 = \det \begin{pmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{pmatrix} = (uv' - u'v)(a)$

Torej je izraz $p \cdot (uv' - u' \cdot v)$ enak 0 pri $x = a$. Enako sklepamo pri $x = b$.

VI.10.

<u>Trditev</u>. Vse lastne vrednosti SL-problema (2.1) in ((2.2) ali (2.3)) so realne.

<u>Dokaz</u>. Naj bo $\lambda \in \mathbb{C}$ lastna vrednost in $v \in \mathcal{D}_L$ pripadajoča lastna funkcija s kompleksnimi vrednostmi. Iz (2.8) sledi

$$\langle Lv, v\rangle = \langle v, Lv\rangle, \quad \forall v \in \mathcal{D}_L.$$

Ta identiteta velja tudi za kompleksne v, ker ima L realne koeficiente.

$$Lv = -\lambda r v; \quad \overline{Lv} = L\bar{v} = -\bar{\lambda} r \bar{v}.$$

$$\langle Lv, v\rangle = \langle -\lambda r v, v\rangle = -\lambda \cdot \int_a^b |v|^2 \cdot r\, dx$$

$$\langle v, Lv\rangle = \langle v, -\lambda r v\rangle$$

$$= -\bar{\lambda} \int_a^b |v|^2 \cdot r \cdot dx.$$

Torej je

$$0 = \langle Lv, v\rangle - \langle v, Lv\rangle = (\bar{\lambda} - \lambda) \cdot \int_a^b |v|^2 \cdot r\, dx.$$

Sledi $\lambda = \bar{\lambda}$ ($\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$) ali $\int_a^b |v|^2 \cdot r\, dx = 0$.

V drugem primeru je $v = 0$ v $L^2([a,b])$, torej ~~ne more biti~~ obstaja netrivialna rešitev le v primeru $\lambda = \bar{\lambda}$.

<u>Trditev</u>. Lastni funkciji v_n, v_m SL problema (2.1) – (2.2), ki pripadata različnima lastnima vrednostima $\lambda_n \neq \lambda_m$, sta <u>ortogonalni</u> v $L^2_r([a,b])$. (prostor L^2 z utežjo r).

<u>Dokaz</u>.
$$\begin{cases} -L(v_n) = \lambda_n \cdot r v_n \\ -L(v_m) = \lambda_m \cdot r v_m \end{cases}$$

Poleg tega v_n, v_m zadoščata robnim pogojem (2.2).

Pomnožimo prvo enačbo z v_m, drugo z v_n, odštejemo in integriramo:

$$\int_a^b \left(v_n L(v_m) - v_m L(v_n) \right) \cdot dx = (\lambda_n - \lambda_m) \cdot \int_a^b v_n v_m r \cdot dx$$

Leva stran je enaka (glej (2.6) in (2.7)):

$$p \cdot \left(v_n v_m' - v_m v_n' \right) \Big|_a^b = 0.$$

Ker je $\lambda_n - \lambda_m \neq 0$, sledi

$$\langle v_n, v_m \rangle_r = \int_a^b v_n \cdot v_m \, r \, dx = 0.$$

$\langle L v_n, v_m \rangle_{L^2} = \langle v_n, L v_m \rangle_{L^2}$. Leva stran je $\langle \lambda_n v_n, v_m \rangle = \lambda_n \langle v_n, v_m \rangle$
desna stran je $\langle v_n, \lambda_m v_m \rangle = \lambda_m \langle v_n, v_m \rangle$

Trditev.

Vse lastne vrednosti regularnega ~~dvoperiodičnega~~ SL-problema so enostavne (to je, pripadajoči lastni podprostor je enorazsežen).

Dokaz. Naj bosta v, w lastni funkciji za isto lastno vrednost λ:

$$L(v) = -\lambda r v; \quad L(w) = -\lambda r w.$$

Torej je $wL(v) - vL(w) = 0$.

Po Lagrangeovi identiteti (2.6) velja

$$0 = wL(v) - vL(w) = \left(p(wv' - vw')\right)'.$$

Torej je funkcija $Q = p\cdot(wv' - vw')$ konstantna.

Iz robnih pogojev sledi, da je na krajiščih

$$Q(a) = 0, \quad Q(b) = 0; \quad \text{torej } Q \equiv 0.$$

Naj bo $W = wv' - vw'$ = <u>determinanta</u> <u>Wronskega</u>.

Ker je $Q = 0$ in $p > 0$, sledi $W \equiv 0$.

To ravno pomeni, da sta rešitvi v, w linearno odvisni funkciji.

SPEKTRALNI IZREK ZA SL PROBLEM.

Za vsak regularen SL-problem obstaja zaporedje lastnih vrednosti

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

Pripadajoč (ortogonalen) sistem lastnih funkcij $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ (v $L^2_r(a,b)$) sestavlja <u>poln ortogonalen sistem</u> v prostoru $L^2_r(a,b)$.

Isto velja za periodičen SL-problem, le da imamo lahko lastne podprostore dimenzije 1 ali 2 (torej so lahko lastne vrednosti večkratnosti 2).

Razvoj funkcije $f \in L^2([a,b])$ v Fourierovo vrsto

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle} \cdot v_n$$

po ~~lastn~~ lastnih funkcijah SL-problema se imenuje <u>SL-razvoj funkcije f</u>.