V. TOPLOTNA ENAČBA NA PALICI

Enačba za prevajanje toplote na končni palici je ($k>0$):

$$u_t = k \cdot u_{xx} \quad ; \qquad 0 \leq x \leq b, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

$$u(0,t) = u(b,t) = 0, \quad t \geq 0 \qquad \text{Dirichletov robni pogoj} \quad (2)$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq b \quad (\text{začetni pogoj}) \quad (3).$$

Začetni odvod $u_t(x,0)$ je seveda določen z enačbo (1) in ga ne moremo predpisati (v nasprotju z valovno enačbo, v kateri namesto u_t nastopa u_{tt}).

Problem lahko obravnavamo s Fourierovo metodo povsem analogno kot pri valovni enačbi (glej IV.4 – IV.5). Iščemo razcepne rešitve $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Po separaciji spremenljivk dobimo za X enačbo

$$X'' + \lambda \cdot X = 0, \qquad X(0) = X(b) = 0$$

Rešitve: $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{b}$; $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$. $(n \in \mathbb{N})$.

Vstavimo $u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$ v (1) in dobimo enačbo za $T_n(t)$:

$$\dot{T}_n = -\lambda_n k \cdot T_n = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot k \cdot T_n \; ; \; t \geq 0.$$

Splošna rešitev je

$$T_n(t) = \underbrace{T_n(0)}_{B_n} \cdot e^{-k\cdot\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 t} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Splošno rešitev $u(x,t)$ problema (1)–(3) iščemo kot superpozicijo (vsoto vrste):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{b} \cdot e^{-k\cdot\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 t} \qquad (4)$$

Koeficiente B_n izračunamo iz začetnega pogoja (3):

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{b}$$

$$(5)$$

Odtod: $$B_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(x) \cdot \sin\frac{n\pi x}{b} \cdot dx \; , \quad n \in \mathbb{N}.$$

S tem je problem v celoti rešen. V nasprotju z valovno enačbo opazimo, da gre rešitev $u(x,t) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$ eksponentno, torej se temperatura stabilizira pri $u_\infty(x) \equiv 0$ (če krajišča hladimo).

Podobno rešujemo nehomogeno toplotno enačbo

$$u_t = k \cdot u_{xx} + F(x,t) \qquad (6)$$

Člen $F(x,t)$ opisuje dovajanje toplote (gretje; hlajenje).
Razvijemo F v trig. vrsto po spremenljivki x:

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{b} \cdot F_n(t) \qquad (7)$$

Rešitev $u(x,t)$ iščemo v obliki

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{b} \cdot T_n(t)$$

ki zadošča robnemu pogoju (2). Iz enačbe (1) dobimo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{b} \cdot \left(\dot{T}_n + k \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot T_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{b} \cdot F_n$$

Primerjamo koeficiente:

$$\dot{T}_n + k \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot T_n = F_n(t) \qquad (8)$$

Rešitev najdemo z variacijo konstante B_n v rešitvi homogene enačbe:

$$T_n(t) = B_n(t) \cdot e^{-k \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 t}$$

$$\dot{T}_n = \dot{B}_n e^{-k\cdot\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 t} - k\cdot\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\cdot B_n\cdot e^{-k\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 t}$$

$$\dot{T}_n + k\cdot\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\cdot T_n = \dot{B}_n e^{-k\cdot\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 t} = F_n(t)$$

$$\dot{B}_n = F_n(t)\, e^{k\cdot\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 t}$$

$$B_n(t) = B_n(0) + \int_0^t F_n(\tau)\, e^{k\cdot\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tau}\cdot d\tau$$

$$T_n(t) = B_n(0)\cdot e^{-k\cdot\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 t} + \int_0^t F_n(\tau)\cdot e^{k\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2(\tau - t)}\cdot d\tau \qquad (9)$$

Koeficiente $B_n(0)$ določimo iz začetnega pogoja pri $t = 0$:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0)\cdot \sin\frac{n\pi x}{b}$$

$$B_n(0) = \frac{2}{b}\int_0^b f(x)\cdot \sin\frac{n\pi x}{b}\cdot dx. \qquad (10)$$

Podobno rešujemo problem prenosa toplote na palici v primeru, ko sta konca palice toplotno izolirana (Neumannov robni pogoj):

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(b,t) = 0 \qquad (11).$$

Sedaj rešitev ter f razvijemo po sistemu $\left\{\cos \frac{n\pi x}{b}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Energijska metoda za enoličnost rešitve.

Denimo, da sta u_1, u_2 dve rešitvi toplotne enačbe z istim začetnim in robnim pogojem.
Tedaj $w = u_2 - u_1$ reši enačbo:

$$(12) \quad \begin{cases} w_t = k \cdot w_{xx} \\ w(0,t) = w(b,t) = 0 \quad (\text{ali } w_x(0,t) = w_x(b,t) = 0) \\ w(x,0) = 0 \end{cases}$$

Energija: $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^b w^2(x,t)\,dx \geq 0 \; (\forall t)$.

$$E'(t) = \int_0^b w \cdot w_t \, dx = \int_0^b k \cdot w \cdot w_{xx} \cdot dx =$$

$$\overset{\text{per partes}}{=} k \cdot w \cdot w_x \Big|_{x=0}^{x=b} - \int_0^b k \cdot w_x^2 \cdot dx = -k \cdot \int_0^b w_x^2 \cdot dx \leq 0.$$

Ker je $E(0) = 0$ in $E'(t) \leq 0$ ter $E(t) \geq 0$, sledi $E(t) \equiv 0$, torej $w \equiv 0$.