<u>ANALIZA 4</u> : <u>PARCIALNE</u> <u>DIFERENCIALNE</u> <u>ENAČBE</u>

Predavatelj: Franc Forstnerič
(Asist.: Bojan Gornik)

<u>Literatura</u>:

- F. John: P.D.E. 4th Ed., Springer 1986
- Y. Pinchover, J. Rubinstein: An Intro. to P.D.E. Cambridge, 2005
- F. Križanič, Navadne dif. en. in variac. račun. DZS, Ljubljana, 1974 (Poglavje 9: PDE 1. reda)
- F. Križanič, Parcialne dif. enačbe DMFA, Lj., 2004
-

(2 kolokvija) ali pisni izpit)

\+

ustni izpit

UVOD

Parcialna diferencialna enačba (PDE) ~~za~~ za funkcijo $u(x,y,\ldots)$ je relacija oblike

$$(*) \quad \boxed{F(x,y,\ldots,u,u_x,u_y,\ldots,u_{xx},u_{yy},u_{xy},\ldots)=0}$$

kjer je F funkcija neodvisnih spr. $x,y,\ldots$, neznane (odvisne) fn. u ter njenih parcialnih odvodov.

Če je F skalarna fn., imamo eno PDE; če je F vektorska, imamo sistem PDE.

Rešitev PDE $(*)$ je vsaka funkcija $u(x,y,\ldots)$, ki zadošča enačbi (oz. sistemu enačb).

(Klasična) rešitev predpostavlja, da ima fn. u odvode vseh redov, ki v enačbi nastopajo.

Posplošene ali distribucijske rešitve: nimamo vseh odvodov; enakost velja v smislu integracije glede na testne funkcije ter integ. per partes.)

U2

Red enačbe: najvišja stopnja odvoda, ki nastopa v enačbi".

Primeri:

$$x u_x + e^{xy} u_y = y \qquad \text{1. reda}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \\ u_t &= k \cdot u_{xx} \end{aligned}\right\} \quad \text{2. reda}$$

$$\left.\begin{aligned} u_t + u_{xxxx} &= 0 \\ \Delta(\Delta u) = \Delta^2 u &= 0 \end{aligned}\right\} \text{4. reda.} \quad \leftarrow \text{biharmonična en.}$$

Linearna enačba:

u in vsi njeni parc. odvodi nastopajo linearno v F; koeficienti so funkcije neodvisnih spremenljivk.

(Vsi zgornji primeri so linearne enačbe).

Primer: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u^3$ ... nelinearna

(semilinearna – nelin. le v u)

Kvazilinearna enačba: vsi odvodi najvišjega reda nastopajo v enačbi linearno; nelinearnosti so lahko v odvodih nižjega reda.

Primer:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u \cdot |\nabla u|^2$$

$$= u \left(u_x^2 + u_y^2 \right)$$

Motivacija: PDE — druga področja matematike
— znanost (fizika, mehanika, kvantna meh., biologija)
— tehnologija
— finance, ekonomija

PDE ponujajo matematične modele ter metode v reševanju v znanosti & tehnologiji.

Osnovni pristop v razvoju modelov:

- definiramo osnovne količine (npr. temperatura, gostota, pritisk, napetost, ...), ki določajo povprečne (makroskopske) vrednosti fundamentalnih mikroskopskih količin
- def. fundamentalne principe, kot npr. zakon o ohranjanju mase, momenta, energije, ... (ohranitveni zakoni)
- izpeljemo zveze, ki sledijo iz ohranitvenih zakonov. Tako dobimo (sisteme) P.D.E..

~~Osnovne~~

Dobro postavljeni problem:

(J. Hadamard, 1865 – 1963; well posed problem)

1° Problem ima rešitev (obstoj)

2° Rešitev je ena sama (enoličnost)

3° Stabilnost : majhne perturbacije v podatkih povzročijo majhne pert. rešitev.

Vsi "naravni" problemi so dobro postavljeni.

V splošnem ima lahko PDE veliko rešitev (pojem "splošne rešitve").

Konkretno (partikularno) rešitev dobimo tako, da predpišemo dodatne pogoje; kot npr.

- začetni pogoj : predpišemo vrednost pri nekem času, npr. $t = 0$.
- robni pogoj : predpišemo vrednost rešitve na robu danega območja.
- Cauchyev pogoj : rešitev mora vsebovati določeno krivuljo, ploskev, ...

OPOMBA

Vsako PDE (ali sistem PDE) višjega reda (>1) lahko prevedemo na sistem PDE 1. reda tako, da uvedemo odvode neznane fn. kot nove neznane funkcije.

npr.: $$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (\nabla u)^2 \cdot u$$
$$= u \cdot (u_x^2 + u_y^2).$$

Definiramo : $\begin{cases} u_x = p \\ u_y = q \end{cases}$

$$\begin{cases} u_{xx} = p_x \\ u_{yy} = q_y \end{cases}$$

$$p_y = (u_x)_y = (u_y)_x = q_x$$

Dobimo sistem PDE. 1. reda:

$$\begin{cases} p_x + q_y = u \cdot (p^2 + q^2) \\ u_x = p \\ u_y = q \end{cases}$$

Sledi tudi enačba $p_y = q_x \; (= u_{xy})$

OSNOVNI PRIMERI PDE.

x, y, z (ali $x_1, x_2, \ldots, x_n$) prostorske spr.

t ... čas

- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ = div (grad) = $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ Laplaceov operator (linearen, 2. reda)

Invarianten glede na "rigid motions" (toge premike); nastopa v fizikalnih ~~zakonih~~, ki so neodvisni od izbire pozicije.

(ELIPTIČNA ENAČBA)

- Laplaceova enačba $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{(homogena)} \\ \Delta u = f & \text{(nehomogena)} \end{cases}$

u harmonična fn. $\Longleftrightarrow \Delta u = 0$.

subharmonična fn. $\Longleftrightarrow \Delta u \geq 0$ ($\Delta u > 0$ strogo s.h.)

Dirichletov problem:

$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{na domeni } D \subset\subset \mathbb{R}^n \\ u|_{\partial D} = g & \text{... dana funkcija.} \end{cases}$

- $n = 2$, $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \leadsto v$ rešitev sistema

$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ CR enačbe

$\Rightarrow \Delta v = 0$,

$f = u + iv$ holomorfna funkcija.

• Valovna enačba na $\mathbb{R}^n$: (Hiperbolične en.)

$$u_{tt} = c^2 \cdot \Delta u$$

($c > 0$ konstanta) linearna, 2. reda

Rešitve predstavljajo:

- valovanje strune pri $n=1$
- zvočno valovanje v cevi pri $n=1$
- ~~veda~~ (plitvo) valovanje vode pri $n=2$
- akustično in svetlobno valovanje pri $n=3$

• Maxwellove enačbe v vakuumu za električno polje $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ in magnetno polje $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$:

$$\begin{cases} \varepsilon \cdot \vec{E}_t = \vec{\nabla} \times \vec{H} & (= \text{rotor polja } H) \\ \mu \cdot \vec{H}_t = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{H} = 0 & (\varepsilon, \mu \text{ konstanti}) \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = E_{1x} + E_{2y} + E_{3z}, \qquad \operatorname{div} \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{H}$$

Vsaka komponenta E_i, H_k zadošča valovni enačbi

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad \text{z} \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu}.$$

- <u>Toplotna enačba</u> (= enačba za prevajanje toplote)

$$\boxed{u_t = k \cdot \Delta u}$$ (linearna, 2 reda.)

$k > 0$ konstanta (toplotna prevodnost)

u = temperatura

(gostota in specifična toplota sta konstantni).

To je osnovni primer <u>parabolične enačbe</u>: enačba 2. reda, toda 1. reda v času t.

- <u>Schrödingerjeva valovna enačba</u> ($n=3$) za nesvoj delec z maso m v polju s potencialno energijo $V(x,y,z)$:

$$\boxed{i\hbar \cdot \psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \Delta\psi + V \cdot \psi}$$

$h = 2\pi\hbar$ Planckova konstanta.

- <u>Enačba minimalne ploskve</u> (Lagrange):

$z = u(x,y)$ graf nad $D \subset \mathbb{R}^2$ z minimalno ploščino; Lagrange:

$$(1+u_y^2)\,u_{xx} - 2u_x u_y \cdot u_{xy} + (1+u_x^2)\,u_{yy} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0.}$$

$u_x, u_y \approx 0 \implies$ dobimo enačbo $\boxed{\Delta u = 0.}$

V splošnem je vložena ploskev $M \subset \mathbb{R}^3$ minimalna natanko tedaj, ko ima v vsaki točki povprečno ukrivljenost enako nič.

Če je $\underset{(F_1,F_2,F_3)}{F} : \underset{\mathbb{R}^2}{D} \longrightarrow M$ __konformna__ __parametrizacija__ ploskve M (= ohranja kote)

velja: $\boxed{\Delta F = 2 \cdot H \cdot \nu}$

H = povprečna ukrivljenost v $F(x,y)$

ν = Gaussova preslikava, ki priredi točki ~~pod~~ $(x,y) \in D$ normalni enotni vektor ploskve M v točki $F(x,y) = p \in M$

Torej je $\boxed{M \text{ minimalna} \iff \Delta F = 0 \text{ harmonična}}$ (F harmonična)

F konformna $\implies$ (F minimalna $\iff$ F harmonična).

Zanimive so torej __konformne__ __harmonične__ __imerzije__ $F : \underset{\mathbb{R}^2}{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

<u>Ničelne holomorfne krivulje</u> (null holomorphic curves):

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ kompl. spr.

$F(z) = (f_1(z), f_2(z), f_3(z)) \in \mathbb{C}^3 \quad (z \in D \subset \mathbb{C})$

holomorfna preslikava.

F je <u>imerzija</u>, če $F'(z) = (f_1'(z), f_2'(z), f_3'(z)) \neq 0$

$$\iff \sum_{j=1}^{3} |f_j'(z)|^2 > 0 .$$

<u>Def</u>: F je <u>ničelna</u>, če $\boxed{\sum_{j=1}^{3} f_j'(z)^2 \equiv 0 .}$

<u>TRDITEV</u>. Če je $D \subset \mathbb{C}$ domena in $F : D \to \mathbb{C}^3$ ničelna holo. imerzija, potem sta

$\mathrm{Re} F, \mathrm{Im} F : D \to \mathbb{R}^3$ konformni minimalni im.

<u>Obratno</u>: če je D enostavno povezana (disk ali $\mathbb{C}$), potem za vsako konformno harmonično (= minimalno) imerzijo $G : D \to \mathbb{R}^3$ obstaja konf. harm.

$H : D \to \mathbb{R}^3$,

tako da je $F = G + iH$ ničelna holo. imerzija.

Dokaz: Naj bo $F = G + iH = (f_1, f_2, f_3) : D \to \mathbb{C}^3$ ničelna holo. krivulja; $f_j = g_j + i h_j$.

$$0 = \sum_{j=1}^{3} f_j'(z)^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x}(z)^2 \quad \text{(CR-enačba)}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial g_j}{\partial x} + i \frac{\partial h_j}{\partial x} \right)^2$$

$$= \sum_{1}^{3} \left[\left(\frac{\partial g_j}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial h_j}{\partial x} \right)^2 \right] + 2i \sum_{1}^{3} \frac{\partial g_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial h_j}{\partial x}.$$

Uporabimo CR enačbo:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial y} \; ; \; -\frac{\partial h_j}{\partial x} = \frac{\partial g_j}{\partial y} \quad (j=1,2,3).$$

Dobimo:

$$\begin{cases} 0 = \sum_{1}^{3} \left(\frac{\partial g_j}{\partial x} \right)^2 - \sum_{1}^{3} \left(\frac{\partial g_j}{\partial y} \right)^2 \\ 0 = \sum_{1}^{3} \frac{\partial g_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial y} \end{cases}$$

To pomeni:

$$|G_x|^2 = |G_y|^2 \quad \Leftarrow \text{parc. odvoda imata isto dolžino}$$

$$G_x \cdot G_y = 0 \quad \leftarrow \text{in sta } \perp$$

Torej je G konformna harmonična.
Analogno za H.. Vsi sklepi gredo tudi v drugo smer.

<u>PRIMER</u>: <u>Katenoida</u> in <u>helikoid</u> sta konjugirani minimalni ploskvi – realni in imaginarni del iste ničelne krivulje

$$F(z) = (\cos z, \sin z, -iz) \quad ; \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Oglejmo si družino minimalnih ploskev za $t \in \mathbb{R}$:

$$G_t(z) = \mathrm{Re}\left(e^{it} F(z)\right) =$$

$$= \cos t \cdot \begin{pmatrix} \cos x \cdot \cosh y \\ \sin x \cdot \cosh y \\ y \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} \sin x \cdot \sinh y \\ -\cos x \cdot \sinh y \\ x \end{pmatrix}$$

Pri $t = 0$ imamo <u>katenoido</u> (prvi stolpec), pri $t = \pm\frac{\pi}{2}$ pa (levi ali desni) <u>helikoid</u> oziroma <u>vijačnico</u> (drugi stolpec).