IV. VALOVNA ENAČBA NA PREMICI.

IV.1. Kanonična oblika in splošna rešitev.

Homogena valovna enačba v eni prostorski dimenziji (na premici) je oblike

(1.1) $$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0; \quad -\infty \leq a \leq x \leq b \leq +\infty, \quad t \geq 0. \quad (c > 0 \text{ konstanta}).$$

Če uvedemo nove spremenljivke

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct,$$

dobimo:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 w_{\xi\eta} = 0;$$

kjer je
$$w(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right).$$

Splošna rešitev enačbe

$$w_{\xi\eta} = 0$$

je
$$w(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

kjer sta F, G poljubni funkciji ene spremenljivke. (Klasične rešitve dobimo v primeru $F, G \in C^2$; posplošene rešitve pri manjši gladkosti.)

Torej je splošna rešitev valovne enačbe (4.1) oblike

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct). \qquad (1.2)$$

Za vsak fiksen $t_0 > 0$ dobimo graf funkcije $x \to G(x-ct_0)$ s premikom grafa $x \to G(x)$ v desno za ct_0. Torej $G(x-ct_0)$ predstavlja "val", ki se širi v desno (v smer naraščajočega x) s hitrostjo c. Ta val imenujemo premi (ali direktni) val (forward wave).

Funkcija $F(x+ct)$ pa predstavlja povratni ali inverzni val (backward wave), ki potuje nazaj (v smeri negativne x-osi) s hitrostjo c.

Splošna rešitev je torej vsota (superpozicija) premega in povratnega vala. Število c je valovna hitrost (= hitrost širjenja valov).

Premice $\left\{\begin{matrix} x - ct = \text{konstanta} \\ x + ct = \text{konstanta} \end{matrix}\right\}$

so karakteristike valovne enačbe (1.1).
(Glej razdelek III.6.)

IV.3.

Iz splošne teorije vemo, da Cauchyev problem ni dobro pogojen vzdolž karakteristik. Direktno iz rešitve (4.2) vidimo, da se morebitne singularnosti rešitev prenašajo (potujejo) vzdolž karakteristik.

Npr, če ima G nezveznost v vrednosti, 1. ali 2. odvodu v neki točki $x=x_0$, ima $G(x-ct)$ enako nezveznost vzdolž premice

$x-ct=x_0$ $\quad (x=x_0-ct)$. Analogno se morebitne nezveznosti odvodov funkcije F prenašajo vzdolž premic $x=x_0+ct$.

Ta fenomen je značilen za hiperbolične enačbe: singularnosti ne izzvenijo, ampak se prenašajo v nedogled. Videli bomo, da je pri paraboličnih in predvsem pri eliptičnih enačbah ravno nasprotno: singularnosti se "zgladijo" (izzvenijo).

IV.2 Cauchyev problem in d'Alembertova rešitev

Cauchyev problem je dobro pogojen vzdolž poljubne nekarakteristične krivulje v $\mathbb{R}^2_{(x,t)}$; to je krivulje, ki ni tangentna na eno od premic $x \pm ct = \text{konst.}$

Fizikalno najbolj zanimiv in smiseln Cauchyev pogoj je začetni pogoj pri času $t=0$. Predpišemo lahko začetno pozicijo $u(x,0)$ ter začetno hitrost $u_t(x,0)$:

$$(2.1)\quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x); & -\infty < x < +\infty, \\ & t \geq 0. \end{cases}$$

Ker že vemo, da je splošna rešitev (1.2) oblike

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

moramo najti F, G tako, da bosta izpolnjena začetna pogoja v (2.1). Dobimo enačbi:

$$(2.2)\quad \begin{cases} u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x) \\ u_t(x,0) = c \cdot F'(x) - c \cdot G'(x) = g(x) \end{cases}$$

Z integriranjem druge enačbe v (2.2) dobimo

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(s)\,ds + C,$$

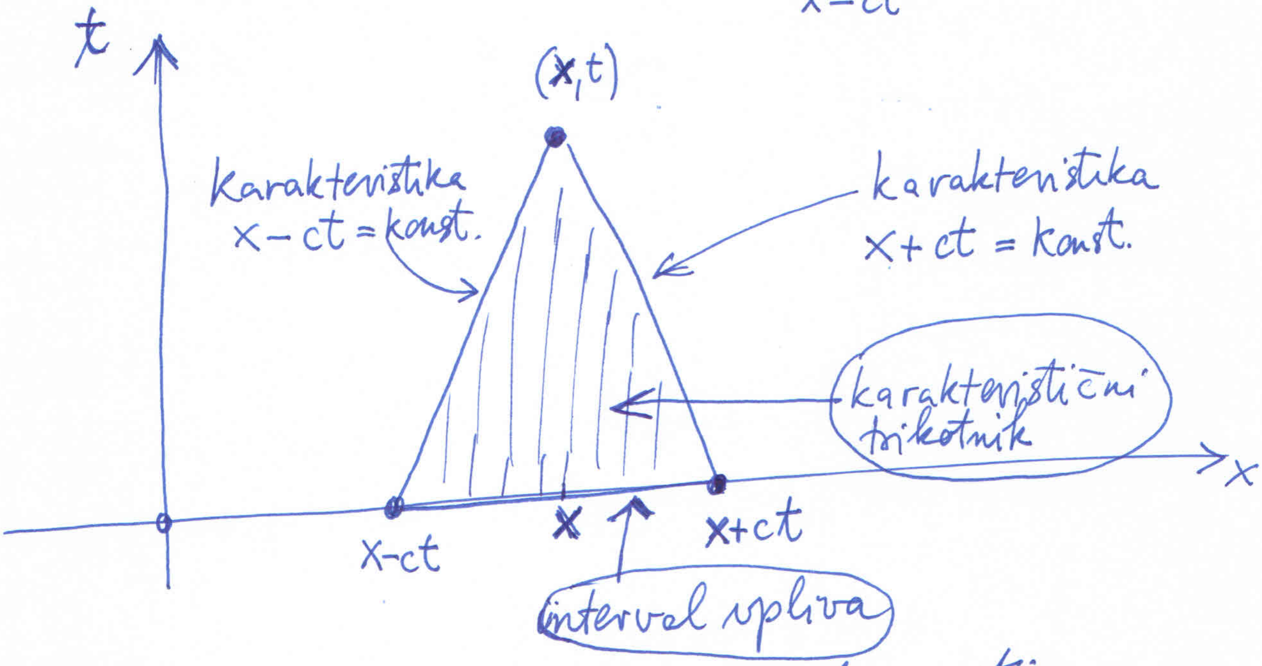
kjer je $C = F(0) - G(0)$.

Odtod izračunamo:

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds + \frac{C}{2} \\[2mm] G(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds - \frac{C}{2} \end{cases} \qquad (2.3)$$

ter dobimo *D'Alembertovo formulo*:

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) =$$
$$= \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds. \qquad (2.4)$$



Vrednost $u(x,t)$ rešitve je enaka vsoti povprečne vrednosti funkcije f v točkah $x \pm ct$ ter $\frac{1}{2c} \cdot$ (integral začetne hitrosti na $[x-ct, x+ct]$).

Zato se $[x-ct, x+ct]$ imenuje *interval vpliva* točke (x,t). *Vrednosti* f, g *zunaj tega intervala* *ne vplivajo na vrednost* $u(x,t)$ rešitve.

IV.3. Cauchyev problem za nehomogeno valovno enačbo.

Obravnavali bomo naslednji Cauchyev problem:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x,t); \qquad -\infty < x < +\infty,\ t \geq 0 \\ &u(x,0) = f(x) \\ &u_t(x,0) = g(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Fizikalno gledano problem pomeni npr. valovanje neskončno dolge strune, pri čemer je podana začetna pozicija $(u(x,0) = f(x))$, začetna hitrost $(u_t(x,0) = g(x))$, funkcija $F(x,t)$ pa opisuje vsiljeno nihanje (npr., kitarist brenka po strunah).

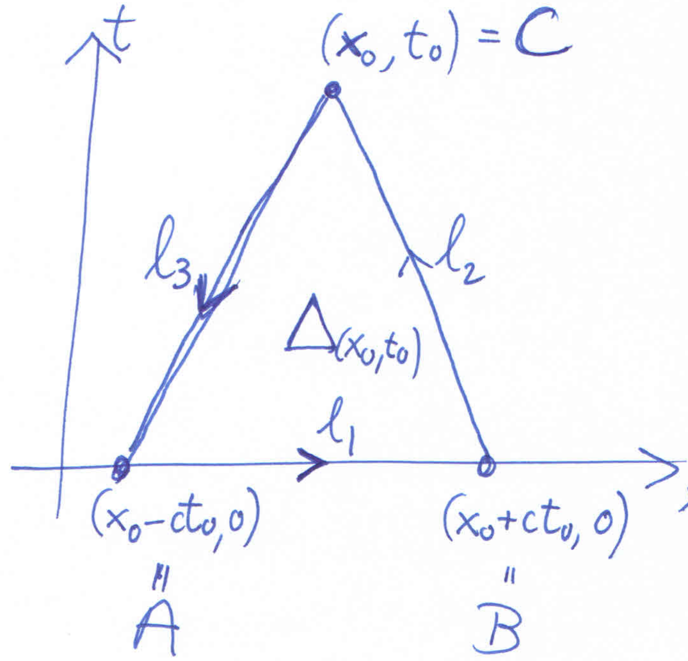
Najprej opazimo, da je rešitev (če obstaja) natanko določena. Če sta u_1, u_2 dve rešitvi, je njuna razlika $v = u_1 - u_2$ očitno rešitev Cauchyevega problema:

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}; \quad v(x,0) = 0; \quad v_t(x,0) = 0.$$

Ker tudi $v \equiv 0$ reši ta problem, sledi iz enoličnosti (glej razdelek IV.2), da je $v \equiv 0$, torej $u_1 = u_2$.

IV. 7.

Formulo za rešitev najdemo z uporabo <u>Greenove formule</u> na trikotniku Δ z oglišči (x_0, t_0), $(x_0 - ct_0, 0)$, $(x_0 + ct_0, 0)$:



Rob $\partial\Delta$ orientiramo koherentno. Tedaj velja

$$\iint_{\Delta} \left(Q(x,t)_x - P(x,t)_t \right) dx\,dt = \oint_{\partial\Delta} P(x,t)\,dx + Q(x,t)\,dt$$

za vsak par C^1 funkcij P, Q na Δ. Recimo sedaj, da je $u(x,t)$ rešitev problema (3.1). Tedaj velja:

$$-\iint_{\Delta} F(x,t)\,dx\,dt = \iint_{\Delta} \left(c^2 u_{xx} - u_{tt} \right) dx\,dt \qquad \left(\begin{matrix} P = u_t; \\ Q = c^2 u_x \end{matrix} \right)$$

$$= \oint_{\partial\Delta} u_t \cdot dx + c^2 u_x \cdot dt$$

Rob $\partial\Delta$ je unija treh stranic (daljic):

l_1 od $(x_0 - ct_0, 0)$ do $(x_0 + ct_0, 0)$

l_2 od $(x_0 + ct_0, 0)$ do (x_0, t_0)

l_3 od (x_0, t_0) do $(x_0 - ct_0, 0)$.

IV.8

Na spodnji stranici l_1 je $u_t = g$ ter $dt = 0$, torej

$$\int_{l_1} u_t\,dx + c^2 u_x \cdot dt = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)\,dx \,.$$

Na desni stranici l_2 velja $x + ct = x_0 + ct_0 = \text{konst.}$, torej je $dx = -c\cdot dt$ in zato

$$\int_{l_2} u_t\,dx + c^2 u_x\,dt = \int_{l_2} -c u_t\,dt + c^2 u_x \cdot \left(-\tfrac{1}{c}\right)\cdot dx$$

$$= -c \int_{l_2} u_t\,dt + u_x\,dx = -c\int_{l_2} du$$

(osnovni izrek integr. rač.) $$= -c\cdot\Big(u(x_0,t_0) - \underbrace{f(x_0+ct_0)}_{= u(x_0+ct_0,\,0)}\Big).$$

Podobno dobimo na levi stranici $dx = c\,dt$, zato:

$$\int_{l_3} u_t\,dx + c^2 u_x\,dt = \int_{l_3} u_t\, c\cdot dt + c^2 u_x \cdot \frac{dx}{c}$$

$$= c\int_{l_3} u_t\,dt + u_x\,dx = c\cdot\int_{l_3} du$$

$$= c\cdot\big(f(x_0-ct_0) - u(x_0,t_0)\big).$$

Če seštejemo dobljene rezultate, dobimo

$$-\iint_{\Delta} F(x,t)\,dx\,dt = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)\,dx + c\big(f(x_0+ct_0) + f(x_0-ct_0)\big) - 2c\cdot u(x_0,t_0)$$

oziroma:

$$u(x_0,t_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0+ct_0) + f(x_0-ct_0)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)\,dx + \frac{1}{2c}\iint_{\Delta} F(x,t)\,dx\,dt \qquad (3.2)$$

V primerjavi z d'Alembertovo formulo (2.4) ~~za~~ rešitev homogene enačbe (nevsiljeno oziroma avtonomno nihanje) vidimo, da vsebuje rešitev dodaten aditivni člen

$$\iint\limits_{\Delta(x_0,t_0)} F(x,t)\,dx\,dt,$$

to je ravno vsota (integral) vsiljenega člena po trikotniku vpliva $\Delta = \Delta(x_0,t_0) \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$.

Dokazali smo tory:

IZREK. Cauchyev problem (3.1) ima natanko eno rešitev, podano za vse $(x_0,t_0)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ s formulo:

$$u(x_0,t_0) = \frac{f(x_0+ct_0)+f(x_0-ct_0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)\,dx + \frac{1}{2c}\iint\limits_{\Delta(x_0,t_0)} F(x,t)\,dx\,dt \tag{3.3}$$

kjer je $\Delta(x_0,t_0)$ trikotnik z oglišči

$$(x_0-ct_0,0)=A,\ (x_0+ct_0,0)=B,\ (x_0,t_0)=C.$$

IV. 4. Nihanje končne strune, uporaba Fourierove metode (separacija spremenljivk).

Majhna nihanje končne (upete) strune opisuje naslednji Cauchyev problem:

$$(4.1)\quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad ; \quad 0 \leqq x \leqq b, \quad t \geqq 0; \\ u(x,0) = f(x) \ldots \text{ začetna pozicija} \\ u_t(x,0) = g(x) \ldots \text{ začetna hitrost} \\ u(0,t) = u(b,t) = 0 \ldots \text{ struna je na obeh koncih upeta in miruje.} \end{cases}$$

Iz zadnjega pogoja seveda sledi tudi

$$f(0) = f(b) = 0; \quad g(0) = g(b) = 0.$$

<u>Fourierova metoda</u>: najprej poiščemo rešitve oblike

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad (4.2)$$

(produkt funkcije x in funkcije t). Iz takih rešitev sestavimo splošno rešitev kot vsoto oz. vrsto. Rešitve oblike (4.2) so <u>stoječi valovi</u>.

Če vstavimo (4.2) v enačbo $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, dobimo:

$$X(x)\cdot \ddot{T}(t) = c^2 \cdot X''(x)\cdot T(t)$$

oziroma:
$$\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \cdot \frac{X''}{X}. \qquad (4.2)$$

Ker je leva stran funkcija t (neodvisna od x), desna stran pa funkcija x (neodvisna od t), sklepamo, da morata biti obe strani konstantni. Označimo to skupno konstanto z $-c^2\lambda$; torej dobimo dve enačbi:

$$X'' + \lambda \cdot X = 0; \quad X(0) = X(b) = 0 \qquad (4.3)$$

$$\ddot{T} + c^2 \cdot \lambda \cdot T = 0. \qquad (4.4)$$

Obe sta navadni diferencialni enačbi (linearni; s konstantnimi koeficienti) funkcije ene spremenljivke.

Enačba (4.3) sprašuje po lastnih vrednostih λ ter lastnih vektorjih (funkcijah $X(x)$) linearnega D.O. $L(X) = -X''$. Ta operator smo obravnavali v predmetu "Navadne diferencialne enačbe".

Lastne vrednosti in lastni vektorji so:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2; \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right); \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poljubna (splošna) rešitev robnega problema (4.3) je oblike $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot X_n(x)$.

Za vsako lastno vrednost $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ rešimo še enačbo (4.4) za $T(t)$:

$$\ddot{T} + c^2 \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot T = 0.$$

Označimo $\omega_n = c \cdot \frac{n\pi}{b}$; torej $\ddot{T} + \omega_n^2 \cdot T = 0$.

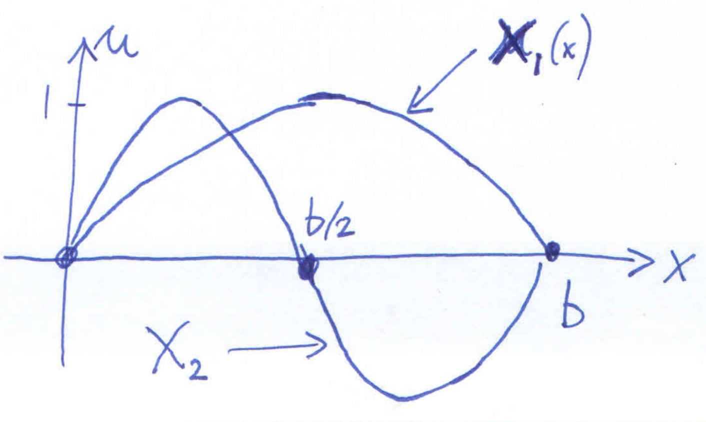
Splošna rešitev:

$$T_n(t) = A_n \cdot \cos(\omega_n t) + B_n \cdot \sin(\omega_n t); \quad A_n, B_n \in \mathbb{R}.$$

Vsakemu številu $n \in \mathbb{N}$ torej ustreza stoječi val

(4.5) $$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right] \sin\frac{n\pi x}{b}$$

Število $\omega_n = cn\pi/b$ je krožna frekvenca tega stoječega vala.



IV. B.

Splošno rešitev PDE $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ter robnega pogoja $u(0,t) = u(b,t) = 0$ $(t \geq 0)$ torej lahko zapišemo kot <u>superpozicijo</u> <u>stoječih</u> <u>valov</u>:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{b} \tag{4.6}$$

Koeficienti $A_n, B_n \in \mathbb{R}$ morajo biti izbrani tako, da vrsta konvergira. Poleg tega moramo sedaj zadostiti začetnima pogojema pri $t=0$ v (4.1):

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{b} = f(x) \\ u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{b} = g(x) \end{aligned}\right\} . \tag{4.7}$$

Koeficienti A_n so torej ravno <u>Fourierovi</u> <u>koeficienti</u> pri razvoju funkcije $f(x)$ po sinusih (trig. vrsta) (razvoj po sinusih je možen zaradi pogoja $f(0)=f(b)=0$).

Podobno so $\omega_n B_n$ Fourierovi koeficienti pri razvoju $g(x)$ v Fourierovo vrsto (po sinusih).

Funkcije $\left\{ \sin\frac{n\pi x}{b},\ \cos\frac{n\pi x}{b}\ ;\ n=1,2,\dots \right\}$ sestavljajo <u>ortogonalno</u> <u>bazo</u> v Hilbertovem prostoru $L^2([0,b])$ vseh merljivih kvadratno integrabilnih realnih funkcij na $[0,b]$ s skalarnim produktom

$$\langle f, g\rangle = \int_0^b f(x)\cdot g(x)\,dx \quad .$$

Norme: $$\left\|\sin\frac{n\pi x}{b}\right\|^2 = \int_0^b \sin^2\frac{n\pi x}{b}\cdot dx$$

$$= \int_0^b \frac{1-\cos\frac{2n\pi x}{b}}{2}\cdot dx = \frac{b}{2}\ .$$

(Podobno cos.)

Torej: $$\left\|\sin\frac{n\pi x}{b}\right\| = \left\|\cos\frac{n\pi x}{b}\right\| = \sqrt{\frac{b}{2}}\ .$$

Formule za Fourierove koeficiente A_n, B_n:

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b f(x)\cdot \sin\frac{n\pi x}{b}\cdot dx \\ B_n = \dfrac{2}{b\omega_n}\cdot\displaystyle\int_0^b g(x)\cdot \sin\frac{n\pi x}{b}\cdot dx \end{cases} \qquad (4.8)$$

IV.5 Obravnava nehomogene valovne enačbe (vsiljeno nihanje) s Fourierovo metodo.

Enačba: $$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \qquad (5.1)$$

Robni pogoji: $u(0,t)=0$, $u(b,t)=0$. $\quad F$ = dana funkcija.

Začetni pogoji: $u(x,0) = f(x)$; $f(0)=f(b)=0$

$u_t(x,0) = g(x)$; $g(0)=g(b)=0$.

Prirejena homogena enačba (z $F=0$) ima poln ortogonalen sistem lastnih funkcij in lastnih vrednosti:

$$\begin{cases} X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{b} \; ; & n \in \mathbb{N}. \\ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \; ; & X_n'' + \lambda_n X_n = 0. \end{cases}$$

Funkcijo $F(x,t)$ razvijem v Fourierovo vrsto po x-spremenljivki:

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot F_n(t) \qquad (5.2)$$

Razvoj je vedno mogoč v $L^2([0,b])$ smislu, ker so $\{X_n\} = \{\sin\frac{n\pi x}{b}\}$ poln ortogonalen sistem.

Rešitev $u(x,t)$ prav tako iščemo v obliki:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) \qquad (5.3)$$

kjer so $T_n(t)$ neznane funkcije. Vstavimo ~~[illegible]~~ v enačbo (5.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot \ddot{T}_n - c^2 X_n'' T_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{T}_n + c^2 \lambda_n T_n\right) \cdot X_n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot \cancel{X_n}$$

Odtod dobimo za vsak $n \in \mathbb{N}$ nehomogeno navadno D.E. 2. reda za T_n:

$$(5.4) \quad \ddot{T}_n + c^2 \lambda_n T_n = F_n \quad ; \quad \omega_n^2 = c^2 \cdot \lambda_n$$

To enačbo rešimo. Splošna rešitev je oblike

$$(5.5) \quad T_n(t) = \tilde{T}_n(t) + \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t\right)$$

kjer je 2. člen na desni splošna rešitev homogene enačbe, $\tilde{T}_n(t)$ pa je partikularna rešitev nehomogene enačbe (5.4).

Sedaj vstavimo X_n, T_n v u (5.3) in določimo koeficiente A_n, B_n v (5.5) iz začetnih pogojev.

PRIMER: $b=1$; $c=1$;

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin \pi x \cdot F_1(t) + \sin 2\pi x \cdot F_2(t)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Lastne funkcije pripadajočega homogenega sistema:

$$\begin{cases} X_n(x) = \sin n\pi x \\ \lambda_n = (n\pi)^2 \\ X_n'' + \lambda_n \cdot X_n = 0 \end{cases}$$

Desne strani enačbe je enaka

$$F(x,t) = X_1(x) \cdot F_1(t) + X_2(x) \cdot F_2(t)$$

Enačba za $T_n(t)$ (5.4):

$$\begin{cases} \ddot{T}_n + (n\pi)^2 \cdot T_n = F_n(t) \\ T_n = A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t + \tilde{T}_n \end{cases}$$

$\tilde{T}_n = 0$ za $n > 2$, ker je tedaj enačba za T_n homog.

Primer: Če je $F_1(t) = \sin \pi t$, rešimo z nastavkom

$$\tilde{T}_1(t) = \alpha \cdot t \cos \pi t$$

$$\ddot{\tilde{T}}_1 + \pi^2 \tilde{T}_1 = -2\pi\alpha \cdot \sin \pi t \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\tilde{T}_1(t) = -\frac{t}{2\pi} \cdot \cos \pi t.$$

PRIMER: Neumannov robni pogoj:

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Enačba: $u_{tt} - u_{xx} = \cos 2\pi x \cdot \cos 2\pi t$;

$$0 \leq x \leq 1; \quad t \geq 0.$$

Lastne funkcije:

$$X_n(x) = \cos n\pi x; \quad \lambda_n = (n\pi)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Razvoj rešitve v Fourierovo (trig.) vrsto:

$$u(x,t) = \frac{T_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot X_n(x)$$

Vstavimo v enačbo:

$$\frac{1}{2}\ddot{T}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{T}_n + (n\pi)^2 T_n\right) \cdot \cos n\pi x =$$

$$= \cos 2\pi t \cdot \cos 2\pi x.$$

Iz primerjave koeficientov sledi:

$n=0$: $\ddot{T}_0 = 0$; $T_0(t) = A_0 + B_0 t$.

$n=2$: $\begin{cases} \ddot{T}_2 + 4\pi^2 \cdot T_2 = \cos 2\pi t \\ T_2(t) = A_2 \cdot \cos 2\pi t + B_2 \cdot \sin 2\pi t + \frac{t}{4\pi} \cdot \sin 2\pi t \end{cases}$

$n \neq 0, 2$: $\ddot{T}_n + (n\pi)^2 \cdot T_n = 0$;

$$T_n(t) = A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t.$$

IV. 6. Energijska metoda, enoličnost rešitev, primerjava z d'Alembertovo formulo.

V razdelku IV.3 smo videli, da ima nehomogena valovna enačba

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x,t) \qquad (6.1)$$

na neskončni premici ($-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$) za vsak začetni pogoj

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \qquad (6.2)$$

natanko eno rešitev, podano z d'Alembertovo formulo (IV.3.3) (glej stran IV.9).

V razdelkih IV.4 in IV.5 pa smo obravnavali isto enačbo na končnem intervalu $0 \leq x \leq b$ ob dveh različnih robnih pogojih:

(6.3) Dirichletov pogoj: $u(0,t) = u(b,t) = 0, \ \forall t \geq 0.$

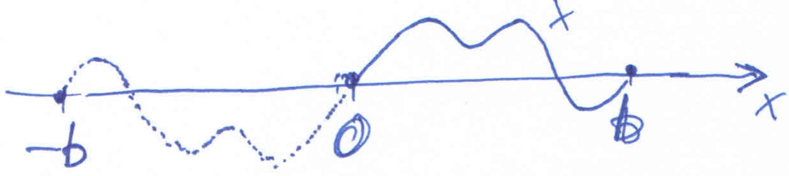
(6.4) Neumannov pogoj: $u_x(0,t) = u_x(b,t) = 0, \ \forall t \geq 0.$

(Splošnejše robne pogoje bomo obravnavali kasneje: lahko jih prevedemo na Dirichletov pogoj s tem, da se nekoliko spremeni diferencialna enačba.)

Oba robna pogoja lahko obravnavamo tudi z d'Alembertovo metodo. Oglejmo si najprej Dirichletov pogoj. V tem primeru morata funkciji f, g v začetnem pogoju (6.2) zadoščati

$$f(0) = f(b) = 0; \quad g(0) = g(b) = 0.$$

Zato lahko f in g razširimo do lihih funkcij na $[-b, +b]$ s predpisom



$$f(x) = -f(-x), \quad g(x) = -f(-x) \quad \text{za } -b \leq x < 0.$$

Nato ju razširimo do $2b$-periodičnih funkcij na $\mathbb{R}$.

Denimo najprej, da je $F(x,t) \equiv 0$ (homogena enačba)

Pri $x_0 = 0$ nam d'Alembertova formula za rešitev da:

$$u(0, t_0) = \frac{f(ct_0) + f(-ct_0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{-ct_0}^{ct_0} g(x)dx$$

$$= 0, \text{ ker sta } f \text{ in } g \text{ lihi funkciji.}$$

Analogno vidimo, da je

$$u(b, t_0) = 0, \quad \forall t_0 \geq 0.$$

Torej rešitev u zadošča ~~...~~ Dirichletovemu robnemu pogoju (6.3). Pri uporabi Fourierove metode (IV.4) v tem primeru lihi fn. f, g razvijemo po sinusih (na $[-b, b]$ in zato tudi na $[0, b]$), to pa nam omogoča tudi rešitev u razviti po sinusih glede na x.

Recimo sedaj, da imamo nehomogeno enačbo.
Če tudi F zadošča pogoju

$$F(0,t) = F(b,t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \qquad (6.5)$$

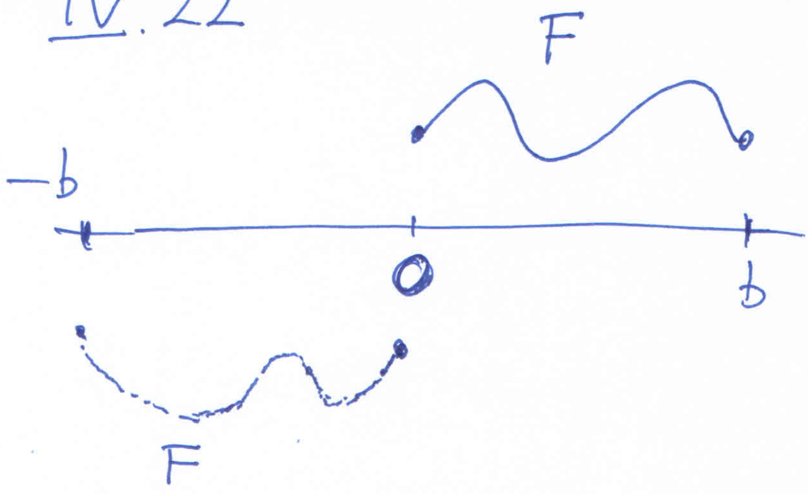
jo lahko ravno tako razširimo do lihe $2b$-periodične funkcije v spremenljivki x, zato jo lahko razvijemo v vrsto po sinusih:

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{b} \cdot F_n(t) \qquad (6.6)$$

V tem primeru je za $x_0 = 0$ integral ~~po~~ po trikotniku $\Delta(0,t_0)$ enak 0, ker je F liha v x (glej (3.3)), torej rešitev $u(x,t)$ še vedno zadošča robnemu pogoju $u(0,t) = u(b,t) = 0$.

Rešitev lahko dobimo tudi po Fourierovi metodi (glej IV.4) z uporabo razvoja (6.6).

Če F ne zadošča pogojem (6.5), jo lahko vseeno razširimo do lihe $2b$-periodične funkcije na $\mathbb{R}$, le da ima ta funkcija singularnosti (skok) v točkah $x = k \cdot b$, $k \in \mathbb{Z}$. Te singularnosti ne vplivajo na $\iint\limits_{\Delta(x_0,t_0)} F(x,t)\,dx\,dt$ in pri $x_0 = k \cdot b$.



dobimo vrednost 0, torej rešitev u zadošča $u(0,t) = u(b,t) = 0$.

Če delamo s Fourierovo metodo in razvijemo F v obliki (6.6), nam Dirichletov izrek o konvergenci trig. vrst pove, da (v primeru, ko je F Lipschitzova po x) vrsta (6.6) pri $x=0$ ali $x=b$ konvergira k povprečju med levo in desno limito F v tej točki; torej k 0. (V notranjih točkah $0<x<b$ konvergira k F.)

Dobljena rešitev $u(x,t)$ v takem primeru v splošnem ni razreda C^2 v spremenljivki x, torej imamo posplošeno rešitev.

Pri obravnavi Neumannovega pogoja (6.4) je zgodba podobna, le da razširimo f in g do sodih $2b$-periodičnih funkcij ter jih razvijemo po kosinusih $\cos\frac{k\pi x}{b}$; prav tako F in rešitev $u(x,t)$.

IV.7. Enoličnost rešitve z uporabo energijske metode.

Naj bo u rešitev valovne enačbe

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x,t), \quad 0 \leq x \leq b$$

ob začetnem pogoju $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ ter enem od robnih pogojev (6.3) (Dirichletov) ali (6.4) (Neumannov). ~~Tota~~

Totalno energijo sistema opisuje funkcija

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^b \left(u_t^2 + c^2 u_x^2\right) dx$$

Prvi člen $\frac{1}{2} \int_0^b u_t^2 \, dx$ je kinetična energija, drugi člen $\frac{1}{2} \int_0^b c^2 u_x^2 \, dx$ pa potencialna energija.

Naslednji izrek je zakon o ohranjanju energije.

IZREK. Če je $F \equiv 0$ (torej je u rešitev homogene enačbe), je $E(t)$ neodvisna od t.

Dokaz.

$$E'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \int_0^b \left(u_t^2 + c^2 u_x^2\right) dx\right)$$

$$= \int_0^b \left(u_t \cdot u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}\right) dx$$

IV.24

Iz enačbe sledi: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, torej

$$E'(t) = c^2 \int_0^b (u_t u_{xx} + u_x u_{xt})\, dx$$

$$= c^2 \cdot \int_0^b \frac{d}{dx}(u_t \cdot u_x) \cdot dx$$

$$= c^2 \cdot \left(u_t(b,t) \cdot u_x(b,t) - u_t(0,t) \cdot u_x(0,t) \right).$$

Pri Dirichletovem pogoju (6.3) je $u_t(0,t) = u_t(b,t) = 0$, torej je rezultat 0.

Pri Neumannovem pogoju (6.4) pa je $u_x(0,t) = u_x(b,t) = 0$ in rezultat je ponovno 0.

V obeh primerih torej sledi $E'(t) \equiv 0$, torej je $E(t) = E(0)$ konstantna.

<u>POSLEDICA</u>. Rešitev problema (6.1), (6.2) in (6.3) (ali (6.4)) je ena sama.

<u>Dokaz</u>. Če sta u_1, u_2 dve rešitvi, je $w = u_2 - u_1$ rešitev homogene enačbe $w_{tt} = c^2 w_{xx}$ ter začetnih pogojev $w(x,0) = 0$, $w_t(x,0)$ in robnih pogojev (6.3) oz. (6.4). Očitno je pri $t = 0$ energija $E_w(0) = 0$; torej $E_w(t) \equiv 0$. Ker je $w_t^2 + c^2 w_x^2 \geq 0$, sledi odtod $w_t \equiv 0$, $w_x \equiv 0$; torej $w \equiv 0$.