

Pisni izpit 29. junija 2009

1. Koliko različnih besed dolžine n lahko sestavimo iz abecede s k znaki, če:
 - (a) **[5]** vsaka črka nastopa največ enkrat?
 - (b) **[5]** se črke lahko poljubnokrat ponovijo?
 - (c) **[15]** sestavljamo črke iz slovenske abecede s 25 znaki, zanimajo pa nas besede dolžine 17, ki vsebujejo vseh pet samoglasnikov, se začnejo s soglasnikom, med vsakima zaporednima soglasnikoma pa je natanko en samoglasnik?
2.
 - (a) **[5]** Določi grupo avtomorfizmov grafa $K_{2,3}$.
 - (b) **[20]** Na koliko neekvivalentnih načinov lahko pobarvamo vozlišča grafa $K_{2,3}$ s tremi barvami, če štejemo dve barvanji za enaki, kadar se razlikujeta zgolj za avtomorfizem grafa. (Sosednji vozlišči sta lahko pobarvani z enako barvo.)
3. **[25]** Koliko je nizov dolžine n nad abecedo $\{1, 2, 3\}$, ki ne vsebujejo strnjene podniza 12?
4. **[25]** Naj bo G povezan graf. Nadalje naj bosta $v \in V(G)$ in $d \in \mathbb{N}$ takšna, da ima vsaka točka iz $V(G) \setminus \{v\}$ stopnjo največ d , medtem ko je $\deg(v)$ lahko večja od d . Pokaži, da od tod sledi $\chi(G) \leq d + 1$.

Rešitve:

1. (a) k^n , (b) k^n , (c) $20^9 \cdot S(8, 5) \cdot 5!$.
2. (a) $S_2 \times S_3$, (b) 60.
3. $a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.
4. Točke grafa G razvrstimo v zaporedje:

$$v_1 = v, v_2, v_3, \dots, v_n.$$

Točko v_1 pobarvamo s prvo barvo. Potem barvamo točke po vrsti, pri čemer vsako točko pobarvamo s prvo prosto barvo (torej s prvo barvo, s katero še ni pobarvana nobena njej sosednja točka). Ker imajo vse točke v_i , za $i \geq 2$, stopnjo največ d , je na i -tem koraku uporabljeno največ d barv za že pobarvane sosedne točke v_i , tako da lahko točko v_i pobarvamo z eno od prvih $(d + 1)$ -barv. Ker to velja za vsak i , nam $d + 1$ barv zadošča, da pobarvamo vse točke grafa. Torej je $\chi(G) \leq d + 1$.