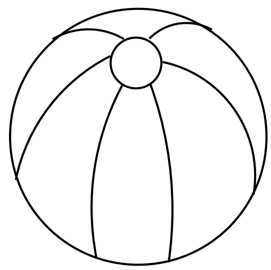
Pisni izpit 30. junija 2010

1. **[25]** Žogo zlepimo iz osmih gumijastih krp, dveh okroglih enake velikosti in šestih štirikotnih enake velikosti, kot kaže slika. Koliko različnih žog lahko naredimo, če:

   (a) imamo na voljo krpe (okrogle in štirikotne) črne, bele, zelene in rumene barve?

   (b) imamo na voljo črne in bele okrogle krpe ter zelene in rumene štirikotne krpe?



2. **[25]** Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je podana z $f(1) = 1$ in

$$f(n+1) = \begin{cases} 2f(n); & \text{če je } n \text{ liho} \\ 2f(n)+1; & \text{če je } n \text{ sodo.} \end{cases}$$

   Poišči eksplicitno formulo za $f(n)$. (*Namig: oglej si razliko* $f(n+1) - f(n)$.)

3. **[25]** Naj bo Γ povezan graf, v katerem za vsak par povezav $e, f \in \Gamma$ velja

$$\min\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} = \max\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} - 2.$$

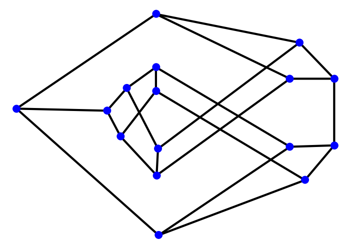
   Dokaži, da je Γ drevo.

4. Za graf Γ na spodnji sliki:

   (a) **[5]** Ugotovi, ali vsebuje kako hamiltonovo pot ali hamiltonov cikel.

   (b) **[10]** Ugotovi, ali je ravninski.

   (c) **[10]** Določi njegovo kromatično število $\chi(\Gamma)$.



Rešitve:

1. Grupa simetrij je izomorfna diedrski grupi D_6 simetrij pravilnega šestkotnika. Če si pogledamo delovanje te grupe na vseh osmih ploskvah, dobimo po Cauchy-Frobeniusovi lemi:

   (a) $\frac{1}{12}(4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 4^8 + 4^5 + 4^5 + 4^4 + 4^5 + 4^4 + 4^4) = 5920$;

   (b) $\frac{1}{12}(2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^8 + 2^5 + 2^5 + 2^4 + 2^5 + 2^4 + 2^4) = 40$.

2. Opazimo, da za vsak n velja $f(n+1) - f(n) - 2f(n-1) = 1$. Poleg tega velja še $f(1) = 1$ in $f(2) = 2f(1) = 2$. Rešimo rekurzivno enačbo in dobimo

$$f(n) = \frac{2}{3}2^n - \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2}.$$

3. Denimo, da Γ ni drevo; torej vsebuje cikel. Naj bo C cikel najkrajše dolžine v Γ; njegova dolžina naj bo n. Naj bosta e in f nasprotni povezavi na C.

   Če je $n = 2k$ za neko naravno število k, je $\min\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} = k-1$ in $\max\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} = k$.

   Če je $n = 2k+1$ za neko naravno število k, je spet $\min\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} = k - 1$ in $\max\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} = k$.

   Sledi $\min\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} = \max\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} - 1$, kar je v nasprotju s predpostavko. Torej povezani graf Γ ne vsebuje nobenega cikla in mora biti drevo.

4. (a) Graf ima hamiltonov cikel (in zato tudi hamiltonovo pot).

   (b) Graf ni ravninski; poiščemo subdivizijo grafa $K_{3,3}$.

   (c) Opazimo, da je $\Delta(\Gamma) = 3$, zato je po Brooksovem izreku je $\chi(\Gamma) \leq 3$. (Saj Γ ni niti polni graf niti cikel lihe dolžine.) Ker Γ vsebuje lihe cikle, mora biti $\chi(\Gamma) \geq 3$. Torej je $\chi(\Gamma) = 3$.