1. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1

17. junij 2014

Priimek in ime: _____

Vpisna št.: _____ Vrsta: _____ Kolona: _____

1. Koliko je simetričnih permutacijskih matrik dimenzije $n \times n$, ki imajo natanko k enic na diagonali ($k \leq n$)? Nalogo najprej rešite za splošna n, k, nato pa izračunajte še za $n = 10$ in $k = 4$.

Da takšne matrike obstajajo, morata biti $n-k$ sodo št.

- Na $\binom{n}{k}$ načinov izberemo vrstice, kjer bo 1 na diagonali
- Nato postavljamo po dve enici v matriko: če je 1 na mestu (i,j) $(i \neq j)$, potem je 1 tudi na mestu (j,i)

– V 1. vrstici izberemo stolpec za enico na $(n-k-1)$-načinov (ni na diag.) in s tem smo dvoločili še eno vrstico ostane $n-k-2$ vrstic (in stolpcev)

– V naslednji vrstici izberemo stolpec na $n-k-3$ načinov (da ni na diag.)

⋮

Skupaj: $\binom{n}{k}(n-k-1)(n-k-3)\cdots 1$

$n=10,\ k=4$: $\binom{10}{4}\cdot 5\cdot 3\cdot 1 = 210\cdot 15 = \underline{3150}$

Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.
Vseeno pa ne pozabite napisati odgovorov!

2. Na koliko načinov lahko damo 13 različnih knjig na 4 knjižne police (vrstni red knjig na policah je pomemben),

(a) če je na vsaki polici vsaj ena knjiga?

(b) če sta na vsaki polici vsaj dve knjigi?

a) $L(13,4)\cdot 4! = \binom{12}{3}\frac{13!}{4!}\cancel{4!}$

$= 220 \cdot 6\,227\,020\,800$

$= 1\,369\,944\,576\,000$

b) U ... nečini, kjer je na vsaki polici vsaj ena knjiga

A_i ... na polici i je natanko ena knjiga

Iščemo $|U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| =$

$1\,369\,944\,576\,000 - 4\cdot 342\,486\,144\,000 + \binom{4}{2}\cdot 62\,270\,208\,000$

$= \binom{4}{3}\cdot 6\,227\,020\,800 + 0 = 348\,713\,164\,800$

$|A_i| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{izbira knjige} \\ \text{za } i\text{-to polico}}}{13}\ \underbrace{L(12,3)\cdot 3!}_{\text{ostale knjige na 3 police}} = 13\cdot\binom{11}{2}\cdot\frac{12!}{\cancel{3!}}\cancel{3!}$

$= 342\,486\,144\,000$

$|A_i \cap A_j| = 13\cdot 12\cdot L(11,2)\cdot 2! = 62\,270\,208\,000$

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10! = 13! = 6\,227\,020\,800$

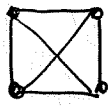
3. Za $n \geq 1$ definiramo "graf šahovskega kralja" H_n takole: vozlišča H_n so polja šahovnice $n \times n$, vozlišči u in v pa sta med seboj povezani, če šahovski kralj lahko pride iz polja u v polje v v eni potezi.

(a) Narišite grafa H_2 in H_3.

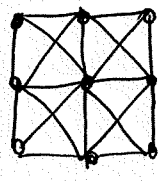
(b) Koliko vozlišč in koliko povezav ima graf H_n? Poiščite še stopnje vozlišč (koliko vozlišč posamezne stopnje vsebuje graf H_n).

(c) Poiščite kromatično število in kromatični indeks za H_n.

a) $n=2$



$n=3$



$n=1$: K_1

b) Za $n \geq 2$

št. vozlišč: n^2

stopnje: 4 vogali : st. 3

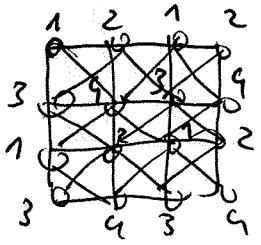
$4 \cdot (n-2)$ robnih vozlišč : st. 5

$(n-2) \cdot (n-2)$ sredinskih vozlišč : st. 8

št. povezav: $m = \frac{1}{2} \sum_{u \in V(G)} \deg(u) = \frac{1}{2}\left(4 \cdot 3 + 4(n-2) \cdot 5 + (n^2 - 4n + 4) \cdot 8\right) = 4n^2 - 6n + 2 = 2(n-1)(2n-1)$

c) Kromatično št. vsej 4, saj H_n vsebuje poljubno K_4.

Obstaja barvanje s 4 barvami:



vozlišče (i,j) pobarvamo z barvo

$$\begin{cases} 1 & i,j \text{ lihe} \\ 2 & i \text{ lih}, j \text{ sod} \\ 3 & i \text{ sod}, j \text{ lih} \\ 4 & i \text{ sod}, j \text{ sod} \end{cases}$$

Sosedi imajo drugačne različne barve: $\chi(H_n) = 4$

Kromatični indeks je 8 ali 9 ($\Delta(H_n) = 8$)

z nekaj truda pobarvamo povezave z 8 barvami: priseben vozlišču preje barve povezav prvih $1, 2, \ldots, 8$

4. Pokažite, da 4-regularen ravninski graf vsebuje vsaj 8 trikotnikov. Koliko najmanj vozlišč ima 4-regularen ravninski graf?

Naj bo G 4-regularen ravninski graf z n vozlišči in m povezav.

Vložimo ga v ravnino, označimo s f št. lic.

Označimo z f_i št. lic dolžine i, $i \geq 3$

Potem velja:

$$\sum_{i \geq 3} f_i = f$$

$$\sum_{i \geq 3} i f_i = 2m$$

$$4n = 2m$$

lemo o vsl. za lice oz. vozlišče

Eulerjeva formula:

$$n - m + f = 2 \quad / \cdot 4$$

$$4n - 4m + 4f = 8$$

$$2m - 4m + 4f = 8$$

$$4f = 8 + 2m$$

$$4 \sum_{i \geq 3} f_i = 8 + \sum_{i \geq 3} i f_i$$

$$f_3 = 8 + \underbrace{\sum_{i \geq 4} (i-4) f_i}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow f_3 \geq 8$ Vsaj 8 lic dolžine 3 $\Rightarrow$ G vsaj 8 trikotnikov.

Najmanjši 4-reg graf je K_5, vendar ni ravninski.

Obstaja pa 4-reg ravninski graf na 6 vozliščih; ods. je torej $\underline{\underline{6}}$.