Diskretna matematika – pisni izpit

5. september 2005

1. Poišči splošno rešitev rekurzivne enačbe

$$a_n - 4na_{n-1} + 3(n^2 - n)a_{n-2} = n!$$

Namig: najprej uporabi ustrezno substitucijo.

Rešitev: Enačbo delimo z $n!$ in definiramo $b_n := \frac{a_n}{n!}$. S to substitucijo se enačba prevede na

$$b_n - 4b_{n-1} + 3a_{n-2} = 1. \tag{1}$$

To je linearna enačba. Karakteristični polinom je

$$Q(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Ničli sta 1 in 3, zato se rešitev homogenega dela glasi:

$$b_n^H = A + B3^n, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Desna stran je oblike 1^n. Vemo, da če je desna stran linearne enačbe oblike $p(n)\alpha^n$ (pri nas je $\alpha = 1$, $p(n) = 1$) potem je ustrezen nastavek $q(n)n^s\alpha^n$, kjer je $q(n)$ polinom stopnje take kot $p(n)$ in je s večkratnost α kot ničle v $Q(\lambda)$ – karakterističnega polinoma (pri nas je $s = 1$). Ustrezen nastavek je torej $b_n^P = Cn$. Ta nastavek vstavimo v enačbo (1) in dobimo $C = -\frac{1}{2}$. Splošna rešitev je torej:

$$b_n = -\frac{1}{2}n + A + B3^n, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

oziroma

$$a_n = n!(-\frac{1}{2}n + A + B3^n), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2. Ugotovi, koliko je n-mestnih desetiških števil, ki vsebujejo

   (a) natanko dve enki,

   (b) vsaj dve enki.

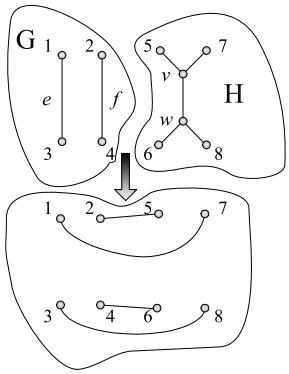
   Rešitev:

   (a) Ločimo primera, ko je enica na prvem mestu in ko ni. Če je enica na prvem mestu, potem sme biti na preostalih mestih le še ena enica. Teh mest je $n-1$ kar je ravno število možnosti za postavitev enice. Na preostalih $n-2$ mestih je lahko katera koli od preostalih 9-ih števk. Takih možnosti je torej: $(n-1)9^{n-2}$.

   Če enica ni na prvem mestu, potem je na prvem mestu ena od preostalih števk razen ničle, torej 8 možnosti. Izmed preostalih $n-1$ mest moramo izbrati dve mesti, na katerih sta enici. To lahko naredimo na $\binom{n-1}{2}$ načinov. Na preostalih $n-3$ mestih se lahko pojavijo vse števke razen 1. Takih možnosti je torej $8\binom{n-1}{2}9^{n-3}$. Skupaj je vseh možnosti $(n-1)9^{n-2} + 8\binom{n-1}{2}9^{n-3}$.

   (b) Izračunamo število vseh n-mestnih števil in odštejemo tista z nič in z eno enico. Vseh števil je $9 \cdot 10^{n-1}$, saj na prvem mestu ne sme biti ničle, na ostalih mestih pa so lahko vse števke. Števil brez enice je $8 \cdot 9^{n-1}$. Števil z eno enico je po podobnem razmisleku kot v točki (a): $9^{n-1} + 8(n-1)9^{n-2}$.

3. Naj bosta G in H dva po točkah 3-obarvljiva, 3-povezana kubična grafa. V enem od grafov izberemo dve nesosednji povezavi e in f, v drugem pa dve sosednji točki u in v ter izvedemo lokalno transformacijo kot na sliki. Pokaži, da je dobljeni graf prav tako 3-obarvljiv, 3-povezan in kubični.



Rešitev: Recimo, da iz grafov G in H po operaciji dobimo graf X. Seveda sta $G - \{e, f\}$ ter $H - \{u, v\}$ podgrafa grafa X in sta zaradi 3-povezanosti G in H povezana, saj 3-povezane grafe ne moremo razbiti na več komponent zgolj z odstranitvijo dveh povezav (Menger) oziroma z odstranitvijo dveh točk.

Operacija odstrani dve točki (u in v), preostalim oštevilčenim točkam pa najprej odstrani po eno povezavo, nato pa doda drugo. Ostalim točkam (ki niso oštevilčene) stopnja ostane nespremenjena. Sledi, da vse točke v X ohranijo stopnjo, kot so jo imele v starem grafu. Torej X je prav tako kubičen.

Ker je graf X kubičen in v njem ni povezave med točkama 1 in 8, graf X ne more biti niti lih cikel niti poln graf. Zato po Brooksovem izreku sledi, da je novi graf 3-obarvljiv.

Dokaz za 3-povezanost je tehnično precej zahteven. Za priznanje vseh točk je bil dovolj že opis ustrezne ideje. Sledi opis ene od idej.

Recimo, da graf X ni 3-povezan. Potem morata obstajati dve točki $a, b \in V(X)$, kateri odstranimo in graf X razpade na vsaj dve komponenti. Recimo, da $a, b \in G - \{e, f\}$. Ker je $H - \{u, v\}$ povezan, je nujno da $G - \{e, f\} - \{a, b\}$ razpade na več komponent, kjer točke 1,2,3,4 niso vse v isti komponenti. Odstranitev katerih koli dveh točk iz G namreč ne povzroči nepovezanega grafa, zato je morala biti vzrok za razpad odstranitev povezav e in f. Toda vse točke 1,2,3,4 so povezane z $H - \{u, v\}$, ki pa je povezan, in zato morajo biti v isti komponenti. Protislovje.

Podobno pokažemo, da točki a, b ne moreta biti vsebovani v $H - \{u, v\}$. Preostane nam le še možnost, da je $a \in G - \{e, f\}$ in $b \in H - \{u, v\}$.

Trditev 1: Točka 1 mora biti v isti komponenti $X - \{a, b\}$, kot še ena izmed točk 2, 3, 4. Analogna trditev velja za katero koli od točk 1, 2, 3,4. Enaka trditev velja tudi za točke 5,6,7,8.

Če grafu G dodamo novo točko u^+ in jo povežemo s točkami 2,3,4, dobimo spet 3-povezan graf. V tem grafu obstajajo 3 notranje disjunktne poti od točke 1 do točke u^+, ki ne uporabljajo povezave f. Če pozabimo točko u^+ dobimo 3 notranje disjunktne poti od točke 1 do točk 2,3,4, ki ne uporabijo povezave f. Kvečjemu ena od teh poti porabi še povezavo e, točka a pa lahko prekine kvečjemu še eno od teh poti. Trditev 1 sledi za točko 1. Zaradi simetrije velja trditev tudi za točke 2,3,4. Z uporabo istega prijema pokažemo trditev za npr. točko 5 proti točkam 6,7,8 in zaradi simetrije velja trditev še na točkah 5,6,7,8.

Trditev 2: Bodisi se v neki komponenti $X - \{a, b\}$ pojavita točki $\{1, 2\}$ in hkrati v neki komponenti točki $\{3, 4\}$, bodisi se skupaj pojavita v neki komponenti točki $\{1, 4\}$ in hkrati skupaj v neki komponenti $\{2, 3\}$.

Podobno, bodisi se v neki komponenti pojavita točki $\{5, 6\}$ in hkrati v neki komponenti $\{7, 8\}$, bodisi se v neki komponenti skupaj pojavita točki $\{5, 8\}$ in hkrati $\{6, 7\}$.

Na graf G pripnemo 2 točki, in sicer a^+ na 1 in 3 ter b^+ na 2 in 4. Dobljen graf je 2-povezan in zato obstajata notranje disjunktni poti med a^+ in b^+, ki inducirata bodisi disjunktni poti $1 \to 2$ in $3 \to 4$ bodisi disjunktni poti $1 \to 4$ in $3 \to 2$. Vse te poti ne morejo vsebovati povezavi e in f. Toda točka a lahko prekine le eno tako pot. Upoštevajoč to in Trditev 1, trditev 2 na točkah 1,2,3,4 sledi. Za točke 5,6,7,8 pripnemo novi točki eno na 5 in 7, drugo pa na 6 in 8.

Upoštevajoč trditev 2, se lahko pojavijo 4 možnosti za "parjenje" točk. Če upoštevamo še povezave, ki jih dodamo med operacijo, pri vseh 4 možnostih sledi, da morajo vse točke $1, \ldots, 8$, razen če je katera od njih enaka a ali b, v isti komponenti $X - \{a, b\}$. Če bi $X - \{a, b\}$ razpadel na več komponent, pa zlahka preverimo, da to ne bi bilo res.

4. Naj bo G po točkah 3-obarvljiva triangulacija ravnine. Dokaži:

   (a) G je Eulerjev graf,

   (b) število omejenih lic je liho.

   Rešitev:

   (a) Izberimo poljubno točko v. Iz točke v v ravnini izhajajo povezave $e_1, \ldots, e_k$ v tem cikličnem vrstnem redu. Na koncih teh povezav je na eni strani točka v, na drugih straneh pa točke $u_1, \ldots, u_k$ (na koncu e_i je u_i). Pokazati moramo, da je k sod. Tedaj bo sledilo, da so vse točke sode stopnje. Ker je graf triangulacija, mora biti povezan, sicer eno lice ne bi bilo homeomorfno disku. To bo pomenilo, da je graf Eulerjev. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je točka v obarvana za barvo 1 in točka u_1 z barvo 2, sicer permutiramo barve. Ker je G triangulacija, točke v, u_1 in u_2 tvorijo trikotnik in zaradi 3 obarvljivosti mora biti točka u_2 nujno barve 3. S podobnim sklepom ugotovimo, da mora biti točka u_3 spet barve 2 in tako dalje. Sledi, da mora biti barva točke u_i enaka 2, za i lih, in 3 za i sod. Ker je naslednji sosed točke u_k v cikličnem redu okoli točke v točka u_1, mora biti k sod, sicer pridemo v protislovje.

   (b) Naj f pomeni število lic in e število vseh povezav. Ker so vsa lica trikotniki velja: $3f = 2e$. Število vseh lic mora zato biti sodo. Ker so vsa lica trikotniki in je natanko eno lice omejeno, je omejenih lic sodo.