Pisni izpit 2. septembra 2010

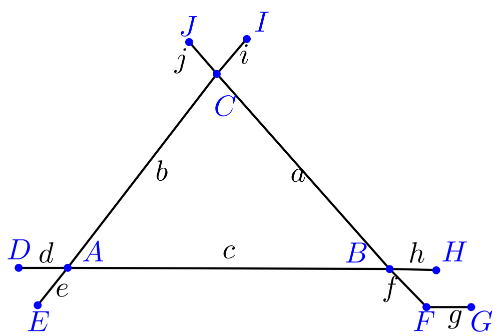
1. Naj bo $\mathcal{M}$ množica $n \times m$ matrik ničel in enic.

   (a) **[5]** Koliko matrik v množici $\mathcal{M}$ je takih, da vsak izmed m stolpcev vsebuje vsaj eno enico?

   (b) **[5]** Naj bo $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $|J| = k$. Koliko matrik iz (a) je takšnih, da za vsak $i \in J$ velja, da je i-ta vrstica ničelna.

   (c) **[15]** Naj bo a_{nm} število vseh matrik iz $\mathcal{M}$, ki imajo v vsaki vrstici in vsakem stolpcu vsaj eno enico. S pomočjo načela vključitev in izključitev ter točke (b) izračunaj a_{nm}.

2. Dan je graf G:



   (a) **[5]** Določi vse avtomorfizme grafa G in jih predstavi kot permutacije na množici vozlišč $V(G) = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$.

   (b) **[5]** Vsak avtomorfizem iz točke (a) predstavi kot permutacijo na množici povezav $E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$.

   (c) **[15]** Na koliko načinov lahko pobarvamo *povezave* grafa G s tremi barvami, do avtomorfizma natančno? (Ne zahtevamo, da sta sosednji povezavi različno pobarvani.)

3. **[25]** Reši rekurzivno enačbo

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 5a_{n+1} + 3a_n = 16$$

   pri pogojih $a_0 = 0$, $a_1 = 10$ in $a_2 = 8$.

4. *Ekscentričnost* vozlišča v v povezanem grafu G je definirana z $e(v) = \max\{d(v, x) \mid x \in V(G)\}$, *polmer* grafa G pa je $r(G) = \min\{e(v) \mid v \in V(G)\}$. Za vozlišče $v \in V(G)$ pravimo, da je *centralno*, če velja $e(v) = r(G)$. *Center* grafa G je množica vseh centralnih vozlišč, označimo ga s $C(G)$.

   (a) **[15]** Pokaži, da za vsako drevo T velja $|C(T)| \in \{1, 2\}$.

   (b) **[10]** Pokaži, da za poljuben povezan graf G velja $\operatorname{diam}(G) \leq 2 \cdot r(G)$.

Rešitve:

1. (a) $(2^n - 1)^m$.

   (b) $(2^{n-k} - 1)^m$.

   (c) Definiramo

   $A_i = \{M \in \mathcal{M} \mid$ vsak stolpec matrike M vsebuje vsaj eno enico in i-ta vrstica je ničelna$\}$.

   Z uporabo načela vključitev in izključitev dobimo

   $$S_k = \binom{n}{k}(2^{n-k} - 1)^m$$

   in

   $$a_{nm} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(2^{n-k} - 1)^m.$$

2. (a) id, $\alpha = (ED)$, $\beta = (IJ)$, $\gamma = (AC)(EI)(DJ)$, $\alpha\beta = (ED)(IJ)$, $\gamma\alpha = (AC)(EIDJ)$, $\gamma\beta = (AC)(EJDI)$, $\gamma\alpha\beta = (AC)(EJ)(DI)$.

   (b) id, $\alpha = (ed)$, $\beta = (ij)$, $\gamma = (ac)(ei)(dj)$, $\alpha\beta = (ed)(ij)$, $\gamma\alpha = (ac)(eidj)$, $\gamma\beta = (ac)(ejdi)$, $\gamma\alpha\beta = (ac)(ej)(di)$.

   (c) $m = \frac{1}{8} \cdot (3^{10} + 2 \cdot 3^9 + 3^8 + 2 \cdot 3^7 + 2 \cdot 3^6) = 13851$.

3. $a_n = -(-3)^n + 2n^2 + 4n + 1$.

4. (a) Tvorimo zaporedje dreves: $T_0 = T$; T_1 je drevo, ki ga dobimo, ko T_0 odstranimo vse liste; T_2 je drevo, ko T_1 odstranimo vse liste... V splošnem, drevo T_j dobimo tako, da drevesu T_{j-1} odstranimo vse liste. V končno mnogo korakih pridemo do drevesa T_r, ki je bodisi K_1 bodisi K_2.

   V zaporedju $T_0, T_1, \ldots, T_r$ si poglejmo poljubni zaporedni drevesi T_i in T_{i+1}. Opazimo, da je $C(T_i) = C(T_{i+1})$. Torej je po indukciji $C(T) = C(T_r)$, slednji pa ima očitno moč 1 (če je $T_r = K_1$) oziroma 2 (če je $T_r = K_2$).

   (b) Naj bosta $u, v \in V(G)$ poljubni vozlišči, za kateri velja $d(u, v) = \mathrm{diam}(G)$, in naj bo c neka centralna točka. Potem je

   $$\mathrm{diam}(G) = d(u, v) \leq d(u, c) + d(c, v) \leq 2e(c) = 2r(G).$$