1. kolokvij, 2008

1. Koliko nizov dolžine 20 nad abecedo a, b, c, d, e vsebuje

   (a) vseh pet črk?

   (b) natanko en b, dva c-ja, tri d-je in štiri e-je?

   (c) natanko sedem a-jev?

   (d) natanko sedem a-jev, toda nobenega para zaporednih a-jev?

2. Za naravni števili n in k, $0 \leq k \leq n$, naj bo $s(n,k)$ število vseh razvrstitev n ljudi za k nepraznih okroglih miz, pri čemer miz ne ločujemo, prav tako ne ločujemo med zavrtenimi postavitvami istih ljudi za dano mizo.

   (a) Izračunaj $s(n,0)$, $s(n,1)$, $s(n,n-1)$ in $s(n,n)$ za vse $n > 0$.

   (b) Izpelji rekurzivno formulo za $s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k)$, kjer je $0 < k < n$.

   (c) Pokaži, da za vsak $n > 0$ velja $x(x+1)\dots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$.

3. Koliko naravnih števil n, manjših ali enakih 1000, je tujih proti številu $2275 = 5^2 \cdot 7 \cdot 13$? (Nasvet: *Uporabi načelo vključitve in izključitve.*)

4. Naj bo G grupa rotacij kocke.

   (a) Zapiši ciklični indeks $Z(G)$ za delovanje na ogliščih.

   (b) Na koliko neekvivalentnih načinov lahko pobarvamo oglišča kocke s rdečo, modro in zeleno barvo?

   (c) Koliko barvanj iz točke (b) je takih, da sta dve oglišči pobarvani rdeče, dve modro in štiri zeleno?

Rešitve:

1. (a) $S(20,5)5!$ ali $5^{20} - 5 \cdot 4^{20} + \binom{5}{2} \cdot 3^{20} - \binom{5}{3} \cdot 2^{20} + \binom{5}{4}$.

   (b) $20\binom{19}{2}\binom{17}{3}\binom{14}{4} = \frac{20!}{10!2!3!4!}$.

   (c) $\binom{20}{7} \cdot 4^{13}$.

   (d) $\binom{14}{7} \cdot 4^{13}$.

2. (a) $s(n,0) = 0$, $s(n,1) = (n-1)!$, $s(n,n-1) = \binom{n}{2}$ in $s(n,n) = 1$.

   (b) Fiksiramo enega človeka. Če sedi sam za mizo, je možnih postavitev ravno toliko kot je možnih razvrstitev $n-1$ ljudi za $k-1$ miz, torej $s(n-1,k-1)$. Če ne sedi sam, razvrstimo preostalih $n-1$ ljudi za k miz na $s(n-1,k)$ načinov, potem pa imamo na izbiro $n-1$ možnosti, da bo naš fiksirani človek sedel levo od že posedenega človeka.

   (c) Naredimo indukcijo po n, pri čemer uporabimo rekurzivno formulo iz točke (b).

3. Definiramo množice

$$U = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 1000\}$$

in

$$\begin{aligned} A_1 &= \{n \in U \mid 5 \text{ deli } n\}, \\ A_2 &= \{n \in U \mid 7 \text{ deli } n\}, \\ A_3 &= \{n \in U \mid 13 \text{ deli } n\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Po načelu vključitve in izključitve je

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 = 633.$$

4. (a) Ciklični indeks je

$$Z(G) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 8x_1^2x_3^2 + 9x_2^4 + 6x_4^2).$$

(Glej Juvan, Potočnik: Teorija grafov in kombinatorika, naloga 13. 3. (a).)

(b) Vstavimo $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ oziroma $x_i = 3$ in dobimo

$$\frac{1}{24}(3^8 + 8 \cdot 3^4 + 9 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^2) = 333.$$

(c) Iščemo koeficient pri monomu $t_1^4t_2^2t_3^2$.

V $\frac{1}{24}8x_1^2x_3^2$: $\frac{1}{24}\frac{8!}{4!2!2!} = \frac{35}{2}$,

v $\frac{1}{24}9x_2^4$: $\frac{1}{24}9\frac{4!}{1!1!2!} = \frac{9}{2}$, ostala dva člena iz $Z(G)$ pa ne vsebujeta monoma $t_1^4t_2^2t_3^2$. Število ustreznih barvanj je torej

$$\frac{35}{2} + \frac{9}{2} = 22.$$