1. kolokvij, 2009

1. (a) V ravnini imamo množico točk A moči n in premico p, ki vsebuje natanko k točk iz množice A. Množica A ima lastnost, da nobena premica v ravnini, različna od p, ne vsebuje več kot dveh točk iz premice A. Koliko premic v ravnini vsebuje vsaj dve točki iz A? Koliko pa je trikotnikov v ravnini, ki imajo vsa tri oglišča vsebovana v množici A?

   (b) Serijska številka žepnega računalnika je sestavljena iz desetih števk, med katerimi so natanko 3 dvojke in natanko 3 enice, vsota ostalih števk pa je 34. Koliko je možnih takšnih serijskih številk?

2. Naj bo $d(n, k)$ število permutacij iz S_n brez fiksinh točk, ki se razcepijo na produkt k disjunktnih ciklov. S pomočjo načela vključitve in izključitve dokaži, da velja

$$d(n, k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} (-1)^i \, u(n - i, k - i),$$

   kjer so $u(n, k)$ nepredznačena Stirlingova števila prve vrste.

3. Naj bo

$$a(n, m) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} S(k, m),$$

   kjer so $S(k, m)$ Stirlingova števila druge vrste.

   (a) Izračunaj $a(n, 1)$.

   (b) Izračunaj $a(n, 2)$ in dokaži $a(n, 2) = a(n - 1, 1) + 3a(n - 1, 2)$.

   (c) Ugani in dokaži splošno formulo za $a(n, m)$.

4. (a) Na razpolago imamo neomejeno število kroglic n različnih barv. Koliko različnih ogrlic iz p kroglic, kjer je p praštevilo, lahko sestavimo, če ne ločimo med zavrtenimi ogrlicami? (*Ločimo* pa med prezrcaljenimi ogrlicami.)

   (b) S pomočjo točke (a) izdelaj kombinatorični dokaz *Malega Fermatovega izreka*, ki pravi, da za naravno število n in praštevilo p velja $n^p \equiv p \pmod{p}$.