1. kolokvij, 2010

1. ([25]) Na koliko načinov lahko razvrstimo 9 prstanov na štiri prste desne roke (brez palca), če

   (a) vrstni red prstanov na prstu ni pomemben, prsti so lahko tudi prazni;

   (b) vrstni red prstanov na prstu ni pomemben, na vsakem prstu mora biti vsaj en prstan;

   (c) vrstni red prstanov na prstu je pomemben, prsti so lahko tudi prazni;

   (d) vrstni red prstanov na prstu je pomemben, na vsakem prstu mora biti vsaj en prstan.

2. ([25]) Čarovnik ima pet prijateljev. V času trajanja čarovniške konference je z vsakim izmed prijateljev skupaj večerjal 10-krat, z vsakim parom prijateljev 5-krat, z vsako trojico prijateljev 3-krat, z vsako četverico dvakrat in z vsemi petimi skupaj enkrat. Koliko dni je trajala konferenca, če je 6-krat večerjal sam?

3. Naj bodo $L(n,k)$ (nepredznačena) Lahova števila in naj bo

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} L(n,k) x^{\underline{k}}.$$

   (a) ([5]) Izračunaj a_1 in a_2.

   (b) ([20]) Izpelji in dokaži splošno formulo za a_n.

4. ([25]) Kvadrat razdelimo na mrežo velikosti 4×4 in barvamo polja z belo in črno barvo. Koliko različnih "šahovnic" lahko na tak način dobimo, če ne ločimo med zavrtenimi šahovnicami.

Rešitve:

1. (a) $4^9 = 262144$,

   (b) $4!S(9,4) = 186480$,

   (c) $\sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} k! L(9,k) = 79833600$,

   (d) $4!L(9,4) = 20321280$.

2. Naj bo U množica vseh dni konference in

$$A_i = \{\text{dnevi, ko je čarovnik večerjal z } i\text{-tim prijateljem}\}.$$

Potem je:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 5 \cdot 10 = 50\\
S_2 &= \binom{5}{2} \cdot 5 = 50\\
S_3 &= \binom{5}{3} \cdot 3 = 30\\
S_4 &= \binom{5}{4} \cdot 2 = 10\\
S_5 &= 1
\end{aligned}$$

in

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)^c| = 6.$$

Zato je

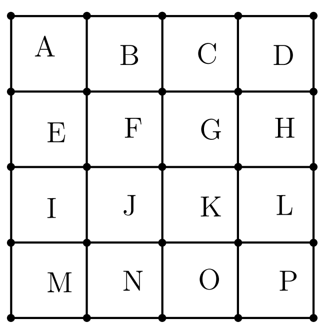
$$\begin{aligned}
|U| &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| + |(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)^c|\\
&= 50 - 50 + 30 - 10 + 1 + 6 = 27.
\end{aligned}$$

Konferenca je torej trajala 27 dni.

3. (a) $a_1 = x$, $a_2 = x(x+1) = x^{\overline{2}}$.

   (b) $a_n = x^{\overline{n}}$, dokaz z indukcijo po n, pri čemer upoštevamo rekurzivno formulo za Lahova števila $L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1)L(n-1,k)$.

4. Grupa rotacij kvadrata $G = \{id, r, r^2, r^3\}$, kjer je r rotacija za kot $\pi/2$ v pozitivni smeri, je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_4$ in deluje na množici vseh 16-ih polj mreže:



Elementi grupe G imajo glede na to delovanje ciklično strukturo

$$\begin{aligned}
&id = (A)(B)(C)(D)(E)(F)(G)(H)(I)(J)(K)(L)(M)(N)(O)(P),\\
&r = (AMPD)(BIOH)(CENL)(FJKG),\\
&r^2 = (AP)(MD)(BO)(IH)(CN)(EL)(FK)(JG)\\
&r^3 = (ADPM)(BHOI)(CLNE)(FGKJ).
\end{aligned}$$

Zato je $c(id) = 16$, $c(r) = c(r^3) = 4$ in $c(r^2) = 8$, število vseh neekvivalentnih barvanj z dvema barvama pa je

$$m = \frac{1}{4}(2^{16} + 2 \cdot 2^4 + 2^8) = 16456.$$