1. kolokvij iz diskretne matematike
Ljubljana, 22. april 2005

1. Reši naslednjo rekurzivno nehomogeno enačbo

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 5a_{n+1} + 3a_n = 16$$

pri začetnih pogojih $a_0 = 0$, $a_1 = 10$ in $a_2 = 8$.

Rešitev. Najprej rešimo homogeni del. Karakteristični polinom je:

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 3).$$

Splošna homogena rešitev je torej.

$$a_n^H = A + Bn + C(-3)^n, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Poiščimo še partikularno rešitev. Ker je $16 = 16(1)^n$ in je 1 dvojna ničla karakterističnega polinoma $Q(\lambda)$, je ustrezen nastavek za partikularno rešitev $b_n = Dn^2$. Tega vstavimo v začetno rekurzivno enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} (D(n+3)^2) + (D(n+2)^2) - 5D(n+1)^2 + 3Dn^2 &= 16, \\ 8D &= 16, \\ D &= 2. \end{aligned}$$

Splošna rešitev je torej:

$$a_n = 2n^2 + A + Bn + C(-3)^n, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Upoštevamo še začetne pogoje in dobimo naslednji sistem enačb:

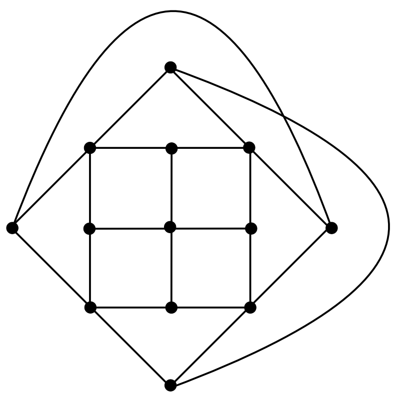
$$\begin{aligned} 0 &= A + C, \\ 10 &= 2 + A + B - 3C, \\ 8 &= 8 + A + 2B + 9C, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1, B = 4, C = -1$. Torej:

$$a_n = 2n^2 + 1 + 4n - (-3)^n.$$

Rešitev lahko enostavno preverimo tako, da jo vstavimo v začetno rekurzivno enačbo.

2. Dan je graf G.

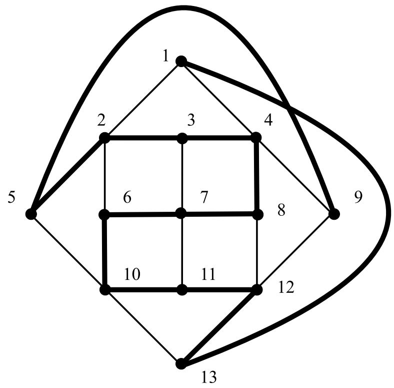


(a) Ali graf vsebuje Hamiltonov cikel? Kaj pa Hamiltonovo pot?

(b) Z najmanj koliko potezami lahko narišeš graf G. Katere so te poteze?

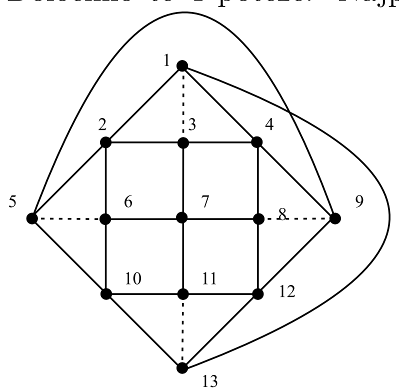
(c) Najdi kak graf, ki ima isto grafovsko zaporedje, ni pa izomorfen grafu G.

Rešitev. Graf oštevilčimo.



(a) Graf ni Hamiltonov, ker če odstranimo točke 2,4,7,10,12 razpade na 6 komponent. Ima pa Hamiltonovo pot, ki je označena na sliki.

(b) Graf ima 8 točk lihe stopnje, kar pomeni, da se ga ne da narisati z manj kot 4 potezami. Določimo te 4 poteze. Najprej dodamo pomožne povezave in dobimo spodnji graf



Ta graf je Eulerjev, saj je povezan in vse točke imajo sodo stopnjo. S pomočjo algoritma za iskanje Eulerjevega obhoda najdemo Eulerjev obhod. Najprej poiščemo "blodeče"obhode.

$$\begin{aligned} 1-4-9-12-13-10-5-2-1 \\ 1-\underline{13-11}-7-\underline{3-1} \\ 5-\underline{9-8}-7-6-2-3-4-8-12-11-10-\underline{6-5} \end{aligned}$$

Dobljene obhode združimo v Eulerjev obhod

$$\begin{aligned} 1-4-9-12-13-10-5-\underline{9-8}-7-6-2-3-4-8- \\ -12-11-10-\underline{6-5}-2-1-\underline{13-11}-7-\underline{3-1} \end{aligned}$$

Iskane poteze so:

$$\begin{aligned} 8-7-6-2-3-4-8-12-11-10-6 \\ 5-2-1-13 \\ 11-7-3 \\ 1-4-9-12-13-10-5-9 \end{aligned}$$

(c) Npr. v grafu povezavo 5-9 prevežemo na 5-1, povezavo 1-13 pa na povezavo 13-9. S tem dobimo graf z istim grafovskim zaporedjem. Originalni graf nima trikotnika, novi graf pa ga očitno ima. Zato sta grafa neizomorfna. Da originalni graf nim trikotnika preverimo tako, da za vsako povezavo preverimo, da krajišči nimata skupnega soseda.

3. Naj bo a_{mn} število vseh matrik velikosti $n \times m$ iz ničel in enic, ki imajo v vsaki vrstici in vsakem stolpcu vsaj ena enico. Dokaži enakost

$$a_{mn} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1)^m.$$

Nasvet: izračunaj najprej število vseh matrik, ki imajo v vsakem stolpcu vsaj eno enico. Nato si lahko pomagaš s pravilom vključitev in izključitev.

Rešitev. Upoštevajmo namig. Število vseh matrik, ki imajo v vsakem stolpcu vsaj eno enico je $N = (2^n - 1)^m$. Za vsak stolpec namreč lahko izberemo vsa možna zaporedja iz 0 in 1, razen tistega, ki ima same ničle, izbori v posameznih stolpcih pa so med sabo neodvisni. Definirajmo:
A_i ... množica vseh matrik, ki imajo v vsakem stolpcu vsaj eno enico in imajo v i-ti vrstici same ničle. Očitno velja

$$a_{mn} = N - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

Po načelu vključitve in izključitve velja:

$$\begin{aligned} a_{mn} &= N - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\},|I|=k} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \\ &= (2^n - 1)^m - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(2^{n-k} - 1)^m \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(2^{n-k} - 1)^m. \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je

$$\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = (2^{n-k} - 1),$$

saj zgornji presek označuje vse matrike z vsaj eno enico v vsakem stolpcu in k ničelnimi vrsticami. Upoštevali smo tudi, da je izborov indeksne množice I z močjo $|I| = k$ ravno $\binom{n}{k}$.

4. Naj bo u poljubna točka 3-povezanega grafa G. Pokaži, da graf $G - u$ vsebuje cikel C, tako da je $G - V(C)$ povezan.

   S protiprimerom pokaži še, da samo zahteva, da je $G - u$ 2-povezan, brez zahteve, da je G 3-povezan, ni dovolj.

   Rešitev. Uporabimo izrek, ki pravi, da za vsak 3-povezan graf G različen od K_4 obstaja povezava e, da je G/e 3-povezan. Dokaz bomo izvedli z indukcijo po velikosti grafa. Vzamimo poljuben 3-povezan graf G. Če je $G = K_4$, je trditev očitno resnična. Sicer naj bo u poljubna točka grafa G. Po omenjenem izreku obstaja povezava e, da je G/e 3-povezan. Denimo najprej, da $u \notin e$. Potem po indukcijski predpostavki velja trditev za G/e in točko $u \in G/e$. Obstaja cikel C v G/e, ki ne gre skozi točko u in $G/e - C$ povezan. Če C ne gre skozi točko, ki je dobljena s skrčitvijo e, je C iskani cikel v G. Sicer ustrezen cikel v G dobimo tako, da vzamemo povezave C ter dodamo povezavo e in tako dobimo cikel $C' \in G$. Ker je v tem primeru $G - C' = G/e - C$, je C' iskani cikel. Recimo sedaj, da je $u \in e$. Če skrčimo e, po indukcijski predpostavki obstaja cikel C, ki ne gre skozi točko dobljeno iz povezave e in $G/e - C$ je povezan. Če bi bil $G - C$ nepovezan, potem bi moral biti $(G - C)/e$ prav tako nepovezan. Ker pa C ne gre skozi e, velja $(G - C)/e = (G/e - C)$, protislovje.

   Protiprimer je npr. graf $K_{2,4}$, kjer je u katera koli točka stopnje 2. Če odstranimo tako točko, dobimo $K_{2,3}$, ki je očitno 2-povezan (npr. preverimo, da sta vsaki dve povezavi na skupnem ciklu). V tem grafu od ciklov obstajajo le 4-cikli, saj mora vsak cikel izmenično potovati med obema particijama, ena particija pa ima le 2 točki. Poleg mora biti zaradi dvodelnosti vsak cikel sode dolžine. Če kak tak cikel odstranimo iz $K_{2,4}$, ta razpade na dve izolirani točki.