Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

1. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE

19. april 2006

1. Reši rekurzivno enačbo

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = n3^n; \quad a_0 = a_1 = 1.$$

Rešitev. Najprej rešimo homogeni del. Karakteristični polinom je

$$Q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1.$$

Ničli karakterističnega polinoma sta $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{2})$ in zato je splošna homogena rešitev:

$$a_n^H = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Poiščimo še partikularno rešitev. Desna stran rekurzivne enačbe je oblike $P(n)\alpha^n$, kjer je $P(n) = n$ in $\alpha = 3$. Za take desne strani poznamo nastavek. Ker število 3 ni ničla karakterističnega polinoma, je ustrezen nastavek

$$a_n^P = (Cn + D)3^n.$$

Nastavek vstavimo v začetno rekurzivno enačbo in dobimo:

$$(C(n+2) + D)3^{n+2} - 2(C(n+1) + D)3^{n+1} - (Cn + D)3^n = n3^n.$$

Pokrajšamo 3^n ter poenostavimo

$$n(2C - 1) + (12C + 2D) = 0.$$

Veljati mora:

$$\begin{aligned} 2C - 1 &= 0, \\ 12C + 2D &= 0. \end{aligned}$$

Iz česar sledi: $C = \frac{1}{2}$ in $D = -3$.

Splošna rešitev je oblike:

$$a_n = a_n^P + a_n^H = \left(\frac{1}{2}n - 3\right)3^n + A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Sedaj moramo določiti še A in B s pomočjo začetnih pogojev.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 = -3 + A + B, \\ a_1 &= 1 = \left(\frac{1}{2} - 3\right)3 + A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Rešimo sistem enačb in dobimo rešitev:

$$\begin{aligned} A &= 2 + \frac{9\sqrt{2}}{8}, \\ B &= 2 - \frac{9\sqrt{2}}{8}. \end{aligned}$$

2. Na Radiu Spodnji Duplek so se svojim zvestim poslušalkam, Jožici, Ančki in Micki, odločili razdeliti deset vstopnic za premiero veseloigre *Maticek se ženi* v izvedbi vaške igralske skupine. Na koliko načinov lahko to storijo, če:

   (i) delijo povsem poljubno;

   (ii) želijo, da vsaka poslušalka dobi vsaj eno karto;

   Pri tem obravnavaj dve možnosti:

   (a) sedežni red ni določen z vstopnico;

   (b) vsaka od desetih kart določa svoj sedež v dvorani (in sedeži se med seboj bistveno razlikujejo).

   Rešitev. Hitro opazimo, da gre pri delitvi kart za preslikave iz množice kart ($n = 10$) v množico poslušalk ($k = 3$).

   (i)(a) Kart ne ločimo, poslušalke ločimo, štejemo pa poljubne preslikave:
   $\binom{n+k-1}{n} = \binom{12}{10} = 66$.

   (i)(b) Karte ločimo, poslušalke ločimo, štejemo poljubne preslikave:
   $k^n = 3^{10}$.

   (ii)(a) Kart ne ločimo, poslušalke ločimo, štejemo surjektivne preslikave:
   $\binom{n-1}{n-k} = \binom{9}{7} = 36$.

   (ii)(b) Karte ločimo, poslušalke ločimo, štejemo surjektivne preslikave:
   $k!S(n,k) = 3!S(10,3)$.

3. Naj bo N množica moči $n \geq 1$ in K množica moči $k \geq 1$. Za vsak $s \leq k$ naj bo $f_s(n,k)$ enako številu vseh tistih funkcij iz N v K, katerih slika ima moč s.

   (a) Izračunaj $f_4(7,4)$.

   (b) Poišči splošno formulo za $f_s(n,k)$.

   (c) Seštej
   $$\sum_{s=1}^{k} S(n,s)k^{\underline{s}}$$
   Pri tem je $k^{\underline{s}} = k(k-1)(k-2)\ldots(k-s+1)$.

   Rešitev.

   (a) Vrednost $f_4(7,4)$ je število vseh funkcij iz množice z močjo 7 v množico z močjo 4, kjer je slika moči 4. To so pa ravno vse surjektivne funkcije med tema množicama. Elemente obeh množic seveda ločimo. Zato $f_4(7,4) = 4!S(7,4)$.

   (b) Za fiksno podmnožico K moči s, je ustreznih surjektivnih funkcij na to množico natanko $s!S(n,s)$. Toda vseh podmnožic moči s v množici K je $\binom{k}{s}$. Zato
   $$f_s(n,k) = \binom{k}{s} s!S(n,s) = S(n,s)k^{\underline{s}}.$$

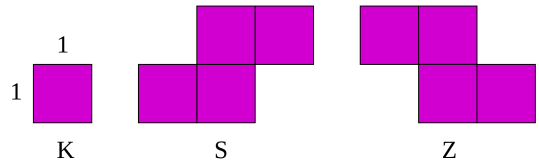
(c) Če seštejemo vsoto in upoštevamo prejšnjo točko, preštejemo ravno vse funkcije. Zato:
$$\sum_{s=1}^{k} S(n,s)k^{\underline{s}} = \sum_{s=1}^{k} f_s(n,k) = k^n.$$

4. Označimo s K, S in Z tlakovce oblik in dimenzij, kot so prikazane na skici. Na koliko načinov lahko z njimi tlakujemo pravokoten balkon širine 2 in dolžine 10, če:

   (a) imamo na razpolago neomejeno število tlakovcev K in S, vendar nič tlakovcev Z.

   (b) imamo na razpolago neomejeno število tlakovcev K, S in Z.

   Nasvet: V obeh primerih najprej izpeljite rekurzivno enačbo za število tlakovanj balkona dimenzije $2 \times n$.



Predstavljajmo si $B(n)$ kot pravokoten balkon dimenzije $2 \times n$, kjer so koordinate polj (i,j), $i = 1,2$, $j = 1,\ldots,n$ in je polje $(1,1)$ levo spodaj. Naj bo $B'(n)$ balkon, ki ga dobimo iz B, tako da odstranimo polje $(2,1)$.

1. Tlakujemo le s tlakovci K in S. Naj a_n šteje število tlakovanj $B(n)$ in b_n število tlakovanj $B'(n)$. Hitro opazimo: $a_n = b_n$, saj mora na polju $(2,1)$ nujno stati tlakovec K. Tlakovanja so lahko dveh oblik. Prva oblika vsebuje tlakovec K tudi na polju $(1,1)$. Število takih tlakovanj je enako številu tlakovanj $B(n-1)$, torej a_{n-1}. Pri drugi obliki je polje $(1,1)$ pokrito s tlakovcem S. Število takih tlakovanj je enako številu tlakovanj $B'(n-2)$. Če vse skupaj sestavimo, dobimo:
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$
   Pri tem je očitno $a_1 = 1$ in $a_2 = 1$. Zaporedje, ki smo ga dobili je ravno Fibbonacijevo zaporedje in $a_{10} = 55$.

2. Tlakujemo lahko z vsemi tlakovci. Naj bo $B''(n)$ balkon $B(n)$ brez polja $(1,1)$. Ker sta tlakovca S in Z zrcalna, sta števili tlakovanj $B'(n)$ in $B''(n)$ enaki in to število označimo z b_n. Število vseh tlakovanj balkona $B(n)$ označimo z a_n. Pazi, a_n in b_n iz te točke sta drugačni zaporedji od a_n, b_n iz prejšnje točke. Pri balkonu $B(n)$ mora biti tlakovec K na vsaj enem od polj $(1,1)$ ali $(2,1)$. Tako ločimo tri možnosti. Če je K na obeh poljih, je takih tlakovanj toliko, kot je tlakovanj balkona $B(n-1)$, torej a_{n-1}. Če je K le na polju $(1,1)$, potem mora polje $(2,1)$ pokrivati tlakovec Z in takih tlakovanj je ravno toliko, kolikor je tlakovanj balkona $B''(n-2)$, torej b_{n-2}. Razmislek za tretjo možnost, ko K pokriva samo polje $(2,1)$, je podoben kot v drugi možnosti in spet dobimo b_{n-2} tlakovanj. Tri možnosti se ne prekrivajo, zato dobimo:
$$a_n = a_{n-1} + 2b_{n-2}. \tag{1}$$

Potrebujemo še rekurzivno enačbo za b_n. V ta namen si oglejmo tlakovanja balkona $B'(n)$. Tu imamo dve možnosti. Bodisi polje $(1,1)$ pokrijemo s tlakovcem K (a_{n-1} načinov) bodisi s tlakovcem S (b_{n-2} načinov). Dobimo:

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-2}. \tag{2}$$

Iz enačbe (1) izrazimo:

$$b_{n-2} = \frac{a_n - a_{n-1}}{2}, \tag{3}$$

oziroma:

$$b_n = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2}. \tag{4}$$

Enačbi (3) in (4) vstavimo v enačbo (2), poenostavimo in dobimo zvezo

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + a_{n-1}. \tag{5}$$

Čeprav je enačba homogena, je iskanje ničel karakterističnega polinoma mučno delo. K sreči potrebujemo le vrednost a_{10}. Očitno: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. $B(3)$ lahko pokrijemo na 3 načine, bodisi s samimi tlakovci K, bodisi uporabimo enega od preostalih tlakovcev in robove zapolnimo s talkovcem K. Zato je $a_3 = 3$. S pomočjo enačbe (5) dobimo $a_{10} = 193$.