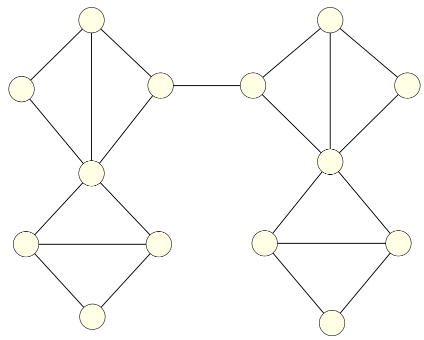
2. kolokvij, 2008

1. Koliko vpetih dreves ima graf G na sliki?



2. Za rešitev rekurzivne enačbe

$$\alpha a_{n+3} - 3a_{n+1} + \beta a_n = 18n, \qquad a_0 = 0, a_1 = \gamma \text{ in } a_2 = 3,$$

velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n + (-2)^n}{n^3} = 3.$$

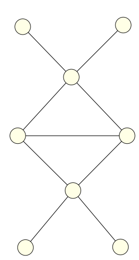
Določi parametre α, β in γ ter poišči rešitev rekurzivne enačbe.

3. Koliko je nizov dolžine n nad abecedo $\{0, 1, 2\}$, ki ne vsebujejo dveh zaporednih enic?

4. (a) Najmanj koliko vozlišč mora imeti 3-regularni graf z diametrom 2, da bo imel notranji obseg enak 5? Poišči kak tak graf.

   (b) Povezan 3-regularni ravninski graf, ki ima samo lica dolžin 5 in 6, imenujemo *fuleren.* Izračunaj, koliko lic dolžine 5 ima fuleren. (*Nasvet:* Uporabi Eulerjevo formulo za multigraf G, vložen v ravnino, $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega(G)$.)

5. Določi grupo avtomorfizmov grafa G na spodnji sliki. Določi njen ciklični indeks za delovanje na vozliščih. Na koliko neizomorfnih načinov lahko pobarvamo vozlišča grafa G z dvema barvama? (Pri tem ne zahtevamo, da sta sosednji vozlišči različnih barv.)



6. S kupa 52 igralnih kart zaporedoma izvlečemo 13 kart. Na koliko načinov lahko to storimo, tako da izvlečemo

   (a) vsaj eno karto vsake igralne barve (igralne barve so *srce, karo, pik* in *križ)*,
   (b) vsaj en križ,
   (c) vsaj eno visoko karto (as, kralj, dama, fant),
   (d) največ en križ?

   Kart ne vračamo, vrstni red izvlečenih kart je pomemben.

Rešitev:

1. Opazimo, da velja $\tau(G) = (\tau(G_1))^4$, kjer je G_1 blok levo-zgoraj. Od tod sledi $\tau(G) = (4+4)^4 = 8^4 = 2^{12} = 4096$.

2. Najprej opazimo, da mora biti a_n oblike $n^3 - \frac{1}{3}(-2)^n + \ldots$. Od tod sledi, da je -2 enojna ničla karakterističnega polinoma, 1 mora biti pa dvojna ničla. Tako dobimo nastavek za rešitev
$$a_n = An + b + C(-2)^n + Dn^3 + En^2$$
in $D = 1$, $C = -\frac{1}{3}$.

   S Hornerjevim algoritmom izračunamo, da mora biti $\alpha = 1$ in $\beta = 2$.

   Ko vstavimo $b_n = n^3 + En^2$ v enačbo, dobimo $E = -4$. Iz začetnih pogojev sledi še $B = \frac{1}{3}$, $A = 6$ in $\gamma = 4$.

   Rešitev enačbe je torej
$$a_n = 6n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n + n^3 - 4n^2.$$

3. Dobimo rekurzivno enačbo $a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$, z začetnimi pogoji $a_1 = 3$, $a_2 = 8$ (od koder lahko izračunamo še $a_0 = 1$. Rešimo rekurzivno enačbo in dobimo
$$a_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n.$$

4. (a) Začnimo z eno točko a_1. Ta ima tri sosede a_2, a_3, a_4. Nobeni od teh sosed nista sosednji, saj bi sicer dobili trikotnik. Prav tako ne smeta imeti skupne sosede (razen a_1), saj bi s tem dobili štirikotnik. Njihove sosede torej določajo še šest dodatnih točk. Od tod sledi, da mora biti $|V(G)| \geq 10$. Graf na 10 točk z iskanimi lastnostmi pa dejansko lahko najdemo. Primer takšnega grafa je namreč Petersenov graf.

   (b) Naj bo $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$ in $|F(G)| = f$. Potem je $n - m + f = 2$. Ker je graf kubičen velja $2m = 3n$, od koder sledi $f = 2 + \frac{n}{2}$. Naj bo x število lic dolžine 5. Vsako vozlišče leži na treh licih, od koder sledi
$$3n = 5x + 6(2 + \frac{n}{2} - x) = 5x + 12 + 3n - 6x,$$
oziroma $x = 12$.

5. Izračunamo
$$Z(G) = \frac{1}{16}(x_1^8 + 3x_1^6x_2 + 3x_1^4x_2^2 + 3x_1^2x_2^3 + 2x_2^4 + 2x_2^2x_4 + 2x_1^2x_2x_4).$$
Število neizomorfnih barvanj z dvema barvama dobimo tako, da v $Z(G)$ vstavimo $x_i = 2$, za vsak i. Takšnih barvanj je 63.

6. (a) $52^{\underline{13}} - 4 \cdot 39^{\underline{13}} + 6 \cdot 26^{\underline{13}} - 4 \cdot 13!$,
   (b) $52^{\underline{13}} - 39^{\underline{13}}$,
   (c) $52^{\underline{13}} - 36^{\underline{13}}$,
   (d) $39^{\underline{13}} + 13^2 \cdot 39^{\underline{12}}$.