2. kolokvij 2009 / pisni izpit 4. junija 2009

IZPIT (naloge 1–4) / 2. KOLOKVIJ (naloge 3–6)

1. Na izbiro imamo k vrst razglednic. Vsake vrste je na razpolago neomejeno število razglednic. Na koliko načinov lahko pošljemo razglednice n-tim prijateljem, če:

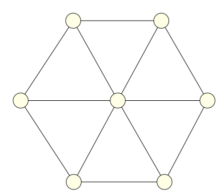
   (a) **[5]** želimo poslati vsakemu prijatelju natančno eno razglednico.

   (b) **[5]** želimo poslati same različne razglednice, tako da dobi vsak prijatelj natančno eno razglednico.

   (c) **[5]** želimo, da vsak prijatelj prejme natanko dve, različni razglednici?

   (d) **[10]** želimo poslati vsakemu prijatelju vsaj eno razglednico, vendar *nobenemu* dveh ali več enakih.

2. Dan je graf Γ na sliki.



   (a) **[10]** Določi grupo vseh avtomorfizmov grafa Γ.

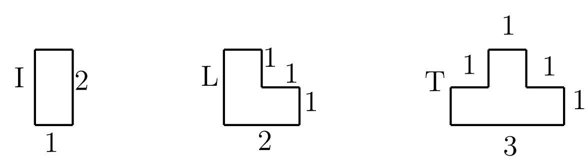
   (b) **[15]** Na koliko načinov lahko pobarvamo vozlišča grafa Γ s tremi barvami (sosednji točki sta lahko enake barve), pri čemer ne ločimo med barvanji, ki se razlikujejo zgolj za avtomorfizem grafa Γ?

3. Naj bo T drevo in naj bo $d = \mathrm{diam}(\Gamma)$. Nadalje, naj bosta P_1 in P_2 poti v drevesu T dolžine d.

   (a) **[15]** Dokaži, da se poti P_1 in P_2 sekata in da je graf, induciran s presekom njunih točk, pot (morda dolžine 0).

   (b) **[10]** V primeru, ko je d liho število, dokaži, da imata potem P_1 in P_2 vsaj eno skupno povezavo. Ali to velja tudi brez predpostavke o lihosti premera? Dokaži ali poišči protiprimer.

4. Na voljo imamo neomejeno število tlakovcev oblik I, L in T.



(a) **[5]** Na koliko načinov lahko tlakujemo hodnik velikosti 2×4 samo s tlakovci oblik I in L?

(b) **[20]** Naj a_n označuje število možnih različnih tlakovanj hodnika velikosti $2 \times n$ s tlakovci oblik I, L in T. Izpelji rekurzivno enačbo za a_n in izračunaj a_{10}.

5. **[25]** Poišči rešitev rekurzivne enačbe

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 5a_{n+1} + 3a_n = 6; \qquad a_0 = -\frac{1}{2}, a_1 = 4, a_2 = -6.$$

6. Naj bo G graf, ki ga dobimo iz Petersenovega grafa tako, da odstranimo eno povezavo na zunanjem ciklu.

(a) **[10]** Ali ima G kakšno hamiltonovo pot? Kaj pa hamiltonov cikel?

(b) **[5]** Določi kromatično število $\chi(G)$.

(c) **[10]** Ali je G ravninski?

Rešitve:

(a) (a) k^n, (b) $k^{\underline{n}}$, (c) $\binom{k}{2}^n$, (d) $(2^k - 1)^n$.

(b) (a) Grupa simetrij pravilnega šestkotnika D_6, (b) 276.

(c) Glej zbirko vaj.

(d) (a) 11. (b) Za a_n dobimo rekurzivno enačbo $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} - a_{n-3}$. Začetni pogoji so $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ in $a_4 = 11$ (iz točke (a)). Z zaporednim računanjem členov zaporedja dobimo $a_{10} = 1853$.

(e) $a_n = -\frac{1}{4}n + \frac{1}{2} - (-3)^n + \frac{3}{4}n^2$.

(f) (a) Ima hamiltonovo pot, nima pa hamiltonovega cikla, (b) $\chi(G) = 3$, (c) graf ni ravninski.