2. kolokvij, 2010

IZPIT (naloge 1–4) / 2. KOLOKVIJ (naloge 3–6)

1. (a) **[5]** Koliko različnih besed dolžine 6 lahko tvorimo iz črk besede MURMUR?
   (b) **[10]** Koliko besed iz točke (a) je takih, ki ne vsebujejo strnjenega podniza RUM?
   (c) **[10]** Koliko besed iz točke (a) je takih, da nobeni dve zaporedni črki nista enaki?

2. **[25]** Na koliko neekvivalentnih načinov lahko pobarvamo ploskve piramide s kvadratno osnovno ploskvijo z rdečo, belo, modro in zeleno barvo, če imamo dve pobarvani piramidi za ekvivalentni, kadar lahko spremenimo eno v drugo zgolj z rotacijo?

3. **[25]** Za rešitev rekurzivne enačbe

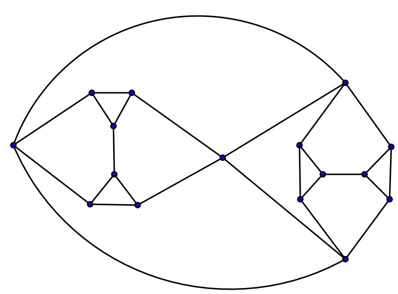
$$\alpha a_{n+3} - 3a_{n+1} + \beta a_n = 18n, \qquad a_0 = 0, a_1 = \gamma \text{ in } a_2 = 3,$$

velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n + (-2)^n}{n^3} = 3.$$

Določi parametre α, β in γ ter poišči rešitev rekurzivne enačbe.

4. Za graf Γ na spodnji sliki:
   (a) **[5]** Ugotovi, ali vsebuje kak eulerjev sprehod ali eulerjev obhod.
   (b) **[10]** Ugotovi, ali vsebuje kako hamiltonovo pot ali hamiltonov cikel.
   (c) **[10]** Določi $\chi(\Gamma)$.

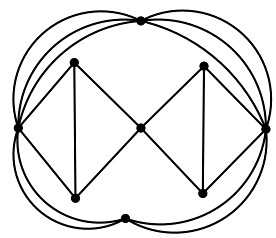


5. Reši rekurzivno enačbo

$$a_n - 3a_{n-1} + 6a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0$$

pri pogojih $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ in $a_2 = 4$.

6. Koliko vpetih dreves ima graf na spodnji sliki?



Rešitve:

1. (a) $\dfrac{6!}{2!2!2!} = 90$.

   (b) $4! - 1 = 23$.

   (c) Naj bo U množica vseh permutacij besede MURMUR, A_1 množica tistih permutacij, ki vsebujejo strnjeni podniz MM, A_2 množica tistih permutacij, ki vsebujejo strnjeni podniz RR in A_3 množica tistih permutacij, ki vsebujejo strnjeni podniz UU. Načelo vključitev in izključitev nam da:

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 = 90 - 90 + 36 - 6 = 30.$$

2. Generator grupe rotacij je rotacija z osjo skozi vrh piramide in središče osnovne ploskve za kot $\pi/2$. Grupa rotacij je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_4$. Neekvivalentnih barvanj s štirimi barvami je

$$m = \frac{1}{4}(4^2 + 4^3 + 4^2 + 4^5) = 280.$$

3. $a_n = 6n + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}(-2)^n + n^3 - 4n^2$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ in $\gamma = 4$.

4. (a) Graf vsebuje več kot dve točki lihe stopnje. Torej ne obstaja eulerjev sprehod v grafu in zato tudi ne eulerjev obhod.

   (b) Graf vsebuje hamiltonov cikel in zato tudi hamiltonovo pot.

   (c) $\chi(\Gamma) = 4$.

5. $a_n = \dfrac{2}{3} + 2^n \left(-\dfrac{2}{3} \cos \dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \sin \dfrac{n\pi}{3} \right)$.

6. Z zaporednim skrčevanjem in odstranjanjem najprej večkratnih in nato še ostalih povezav pokažemo, da je
$$\tau = 2 \cdot 64 \cdot 108 + 36 \cdot 64 = 16128.$$