Zbirka kolokvijev in izpitov iz diskretne matematike

Karin Cvetko Vah

Ljubljana, marec 2011

Predgovor

V pričujoči zbirki so zbrani kolokviji in izpiti iz predmeta Diskretna Matematika univerzitetnega študija matematike na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Kolokviji in izpiti so iz obdobja študijskih let 2007-08 do 2008-10, večini so priložene tudi podrobne rešitve. Zbirka je v prvi vrsti namenjena študentom matematike, kot priprava na izpit.

V Ljubljani, marca 2011 *Karin Cvetko Vah*

1. kolokvij, 2008

1. Koliko nizov dolžine 20 nad abecedo a, b, c, d, e vsebuje

   (a) vseh pet črk?

   (b) natanko en b, dva c-ja, tri d-je in štiri e-je?

   (c) natanko sedem a-jev?

   (d) natanko sedem a-jev, toda nobenega para zaporednih a-jev?

2. Za naravni števili n in k, $0 \leq k \leq n$, naj bo $s(n,k)$ število vseh razvrstitev n ljudi za k nepraznih okroglih miz, pri čemer miz ne ločujemo, prav tako ne ločujemo med zavrtenimi postavitvami istih ljudi za dano mizo.

   (a) Izračunaj $s(n,0)$, $s(n,1)$, $s(n,n-1)$ in $s(n,n)$ za vse $n > 0$.

   (b) Izpelji rekurzivno formulo za $s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k)$, kjer je $0 < k < n$.

   (c) Pokaži, da za vsak $n > 0$ velja $x(x+1)\ldots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$.

3. Koliko naravnih števil n, manjših ali enakih 1000, je tujih proti številu $2275 = 5^2 \cdot 7 \cdot 13$? (Nasvet: *Uporabi načelo vključitve in izključitve.*)

4. Naj bo G grupa rotacij kocke.

   (a) Zapiši ciklični indeks $Z(G)$ za delovanje na ogliščih.

   (b) Na koliko neekvivalentnih načinov lahko pobarvamo oglišča kocke s rdečo, modro in zeleno barvo?

   (c) Koliko barvanj iz točke (b) je takih, da sta dve oglišči pobarvani rdeče, dve modro in štiri zeleno?

Rešitve:

1. (a) $S(20,5)5!$ ali $5^{20} - 5 \cdot 4^{20} + \binom{5}{2} \cdot 3^{20} - \binom{5}{3} \cdot 2^{20} + \binom{5}{4}$.

   (b) $20\binom{19}{2}\binom{17}{3}\binom{14}{4} = \frac{20!}{10!2!3!4!}$.

   (c) $\binom{20}{7} \cdot 4^{13}$.

   (d) $\binom{14}{7} \cdot 4^{13}$.

2. (a) $s(n,0) = 0$, $s(n,1) = (n-1)!$, $s(n,n-1) = \binom{n}{2}$ in $s(n,n) = 1$.

   (b) Fiksiramo enega človeka. Če sedi sam za mizo, je možnih postavitev ravno toliko kot je možnih razvrstitev $n-1$ ljudi za $k-1$ miz, torej $s(n-1,k-1)$. Če ne sedi sam, razvrstimo preostalih $n-1$ ljudi za k miz na $s(n-1,k)$ načinov, potem pa imamo na izbiro $n-1$ možnosti, da bo naš fiksirani človek sedel levo od že posedenega človeka.

   (c) Naredimo indukcijo po n, pri čemer uporabimo rekurzivno formulo iz točke (b).

3. Definiramo množice

$$U = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 1000\}$$

in

$$\begin{aligned} A_1 &= \{n \in U \mid 5 \text{ deli } n\}, \\ A_2 &= \{n \in U \mid 7 \text{ deli } n\}, \\ A_3 &= \{n \in U \mid 13 \text{ deli } n\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Po načelu vključitve in izključitve je

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 = 633.$$

4. (a) Ciklični indeks je

$$Z(G) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 8x_1^2x_3^2 + 9x_2^4 + 6x_4^2).$$

(Glej Juvan, Potočnik: Teorija grafov in kombinatorika, naloga 13. 3. (a).)

(b) Vstavimo $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ oziroma $x_i = 3$ in dobimo

$$\frac{1}{24}(3^8 + 8 \cdot 3^4 + 9 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^2) = 333.$$

(c) Iščemo koeficient pri monomu $t_1^4t_2^2t_3^2$.

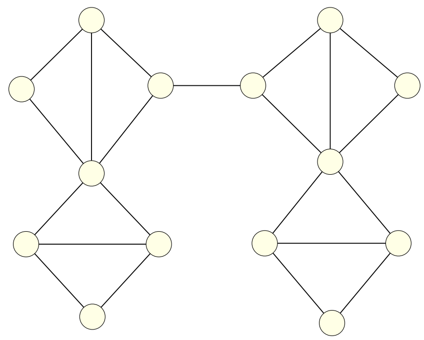
V $\frac{1}{24}8x_1^2x_3^2$: $\frac{1}{24}\frac{8!}{4!2!2!} = \frac{35}{2}$,

v $\frac{1}{24}9x_2^4$: $\frac{1}{24}9\frac{4!}{1!1!2!} = \frac{9}{2}$, ostala dva člena iz $Z(G)$ pa ne vsebujeta monoma $t_1^4t_2^2t_3^2$. Število ustreznih barvanj je torej

$$\frac{35}{2} + \frac{9}{2} = 22.$$

2. kolokvij, 2008

1. Koliko vpetih dreves ima graf G na sliki?



2. Za rešitev rekurzivne enačbe

$$\alpha a_{n+3} - 3a_{n+1} + \beta a_n = 18n, \qquad a_0 = 0, a_1 = \gamma \text{ in } a_2 = 3,$$

velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n + (-2)^n}{n^3} = 3.$$

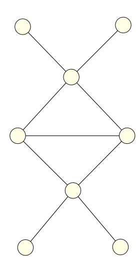
Določi parametre α, β in γ ter poišči rešitev rekurzivne enačbe.

3. Koliko je nizov dolžine n nad abecedo $\{0, 1, 2\}$, ki ne vsebujejo dveh zaporednih enic?

4. (a) Najmanj koliko vozlišč mora imeti 3-regularni graf z diametrom 2, da bo imel notranji obseg enak 5? Poišči kak tak graf.

   (b) Povezan 3-regularni ravninski graf, ki ima samo lica dolžin 5 in 6, imenujemo *fuleren*. Izračunaj, koliko lic dolžine 5 ima fuleren. (*Nasvet:* Uporabi Eulerjevo formulo za multigraf G, vložen v ravnino, $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega(G)$.)

5. Določi grupo avtomorfizmov grafa G na spodnji sliki. Določi njen ciklični indeks za delovanje na vozliščih. Na koliko neizomorfnih načinov lahko pobarvamo vozlišča grafa G z dvema barvama? (Pri tem ne zahtevamo, da sta sosednji vozlišči različnih barv.)



6. S kupa 52 igralnih kart zaporedoma izvlečemo 13 kart. Na koliko načinov lahko to storimo, tako da izvlečemo

   (a) vsaj eno karto vsake igralne barve (igralne barve so *srce, karo, pik* in *križ)*,
   (b) vsaj en križ,
   (c) vsaj eno visoko karto (as, kralj, dama, fant),
   (d) največ en križ?

   Kart ne vračamo, vrstni red izvlečenih kart je pomemben.

Rešitev:

1. Opazimo, da velja $\tau(G) = (\tau(G_1))^4$, kjer je G_1 blok levo-zgoraj. Od tod sledi $\tau(G) = (4+4)^4 = 8^4 = 2^{12} = 4096$.

2. Najprej opazimo, da mora biti a_n oblike $n^3 - \frac{1}{3}(-2)^n + \ldots$. Od tod sledi, da je -2 enojna ničla karakterističnega polinoma, 1 mora biti pa dvojna ničla. Tako dobimo nastavek za rešitev
$$a_n = An + b + C(-2)^n + Dn^3 + En^2$$
in $D = 1$, $C = -\frac{1}{3}$.

   S Hornerjevim algoritmom izračunamo, da mora biti $\alpha = 1$ in $\beta = 2$.

   Ko vstavimo $b_n = n^3 + En^2$ v enačbo, dobimo $E = -4$. Iz začetnih pogojev sledi še $B = \frac{1}{3}$, $A = 6$ in $\gamma = 4$.

   Rešitev enačbe je torej
$$a_n = 6n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n + n^3 - 4n^2.$$

3. Dobimo rekurzivno enačbo $a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$, z začetnimi pogoji $a_1 = 3$, $a_2 = 8$ (od koder lahko izračunamo še $a_0 = 1$. Rešimo rekurzivno enačbo in dobimo
$$a_n = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}(1 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}(1 - \sqrt{3})^n.$$

4. (a) Začnimo z eno točko a_1. Ta ima tri sosede a_2, a_3, a_4. Nobeni od teh sosed nista sosednji, saj bi sicer dobili trikotnik. Prav tako ne smeta imeti skupne sosede (razen a_1), saj bi s tem dobili štirikotnik. Njihove sosede torej določajo še šest dodatnih točk. Od tod sledi, da mora biti $|V(G)| \geq 10$. Graf na 10 točk z iskanimi lastnostmi pa dejansko lahko najdemo. Primer takšnega grafa je namreč Petersenov graf.

   (b) Naj bo $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$ in $|F(G)| = f$. Potem je $n - m + f = 2$. Ker je graf kubičen velja $2m = 3n$, od koder sledi $f = 2 + \frac{n}{2}$. Naj bo x število lic dolžine 5. Vsako vozlišče leži na treh licih, od koder sledi
$$3n = 5x + 6(2 + \frac{n}{2} - x) = 5x + 12 + 3n - 6x,$$
oziroma $x = 12$.

5. Izračunamo

$$Z(G) = \frac{1}{16}(x_1^8 + 3x_1^6x_2 + 3x_1^4x_2^2 + 3x_1^2x_2^3 + 2x_2^4 + 2x_2^2x_4 + 2x_1^2x_2x_4).$$

Število neizomorfnih barvanj z dvema barvama dobimo tako, da v $Z(G)$ vstavimo $x_i = 2$, za vsak i. Takšnih barvanj je 63.

6. (a) $52^{\underline{13}} - 4 \cdot 39^{\underline{13}} + 6 \cdot 26^{\underline{13}} - 4 \cdot 13!$,
   (b) $52^{\underline{13}} - 39^{\underline{13}}$,
   (c) $52^{\underline{13}} - 36^{\underline{13}}$,
   (d) $39^{\underline{13}} + 13^2 \cdot 39^{\underline{12}}$.

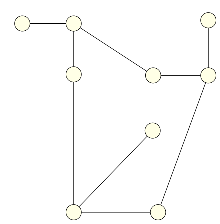
Pisni izpit, 2. septembra 2008

1. Koliko različnih nizov dolžine n, ki vsebujejo liho mnogo A-jev lahko sestavimo iz črk A, B in C?

2. Za graf na sliki

   (a) določi ciklični indeks grupe avtomorfizmov pri delovanju na točkah,

   (b) izračunaj, najmanj koliko barv moramo uporabiti, če želimo pobarvati graf na 10000 različnih načinov. (Pri tem ni nujno, da sta sosednji točki pobarvani različno.)



3. Zaporedje $(a_n)_n$ je podano rekurzivno:

$$a_n = -2a_{n-2} - a_{n-4}; \qquad a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ in } a_3 = 3.$$

   Izračunaj a_{2008}?

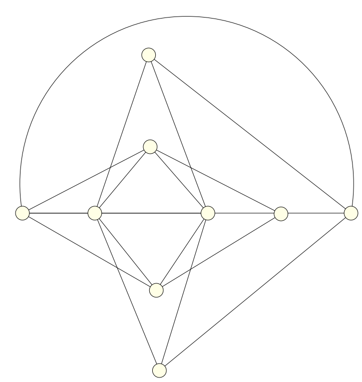
4. Za graf na sliki ugotovi,

   (a) ali ima eulerjev sprehod ali oziroma obhod;

   (b) ali ima hamiltonovo pot oziroma cikel;

   (c) ali je ravninski;

   (d) kakšno je njegovo kromatično število.



Pisni izpit 17. septembra 2008

1. Koliko je naravnih števil do vključno 100000, ki niso niti kvadrat niti kub niti četrta potenca kakega naravnega števila?

2. Reši rekurzivno enačbo

$$a_n + 2a_{n-1} - 5a_{n-2} - 6a_{n-3} = 1,$$

   pri pogojih $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$.

3. Dane imamo črke

   R, A, D, I, I, M, A, M, O, F, I, L, M, E.

   (a) Koliko različni nizov lahko sestavimo iz teh črk?
   (b) Koliko različnih nizov, ki ne vsebujejo nobenega izmed nizov RADI, IMAMO, FILME lahko sestavimo iz teh črk?
   (c) Koliko različnih nizov, v katerih *ne* nastopata skupaj dva samoglasnika lahko sestavimo iz teh črk?

4. Pravimo, da je graf G *k-povezavno-povezan*, če je graf $G \backslash X$ povezan za vsako množico $X \subseteq E(G)$, za katero velja $|X| < k$. Naj bo G povezan graf, v katerem za vsako povezavo e obstajata dva cikla, katerih edina skupna povezava je e. Pokaži, da je graf G 3-povezavno povezan.

1. kolokvij, 2009

1. (a) V ravnini imamo množico točk A moči n in premico p, ki vsebuje natanko k točk iz množice A. Množica A ima lastnost, da nobena premica v ravnini, različna od p, ne vsebuje več kot dveh točk iz premice A. Koliko premic v ravnini vsebuje vsaj dve točki iz A? Koliko pa je trikotnikov v ravnini, ki imajo vsa tri oglišča vsebovana v množici A?

   (b) Serijska številka žepnega računalnika je sestavljena iz desetih števk, med katerimi so natanko 3 dvojke in natanko 3 enice, vsota ostalih števk pa je 34. Koliko je možnih takšnih serijskih številk?

2. Naj bo $d(n,k)$ število permutacij iz S_n brez fiksinh točk, ki se razcepijo na produkt k disjunktnih ciklov. S pomočjo načela vključitve in izključitve dokaži, da velja

$$d(n,k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} (-1)^i \, u(n-i, k-i),$$

   kjer so $u(n,k)$ nepredznačena Stirlingova števila prve vrste.

3. Naj bo

$$a(n,m) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} S(k,m),$$

   kjer so $S(k,m)$ Stirlingova števila druge vrste.

   (a) Izračunaj $a(n,1)$.

   (b) Izračunaj $a(n,2)$ in dokaži $a(n,2) = a(n-1,1) + 3a(n-1,2)$.

   (c) Ugani in dokaži splošno formulo za $a(n,m)$.

4. (a) Na razpolago imamo neomejeno število kroglic n različnih barv. Koliko različnih ogrlic iz p kroglic, kjer je p praštevilo, lahko sestavimo, če ne ločimo med zavrtenimi ogrlicami? (*Ločimo* pa med prezrcaljenimi ogrlicami.)

   (b) S pomočjo točke (a) izdelaj kombinatorični dokaz *Malega Fermatovega izreka*, ki pravi, da za naravno število n in praštevilo p velja $n^p \equiv p \pmod{p}$.

2. kolokvij 2009 / pisni izpit 4. junija 2009

IZPIT (naloge 1–4) / 2. KOLOKVIJ (naloge 3–6)

1. Na izbiro imamo k vrst razglednic. Vsake vrste je na razpolago neomejeno število razglednic. Na koliko načinov lahko pošljemo razglednice n-tim prijateljem, če:

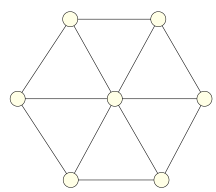
   (a) **[5]** želimo poslati vsakemu prijatelju natančno eno razglednico.

   (b) **[5]** želimo poslati same različne razglednice, tako da dobi vsak prijatelj natančno eno razglednico.

   (c) **[5]** želimo, da vsak prijatelj prejme natanko dve, različni razglednici?

   (d) **[10]** želimo poslati vsakemu prijatelju vsaj eno razglednico, vendar *nobenemu* dveh ali več enakih.

2. Dan je graf Γ na sliki.



   (a) **[10]** Določi grupo vseh avtomorfizmov grafa Γ.

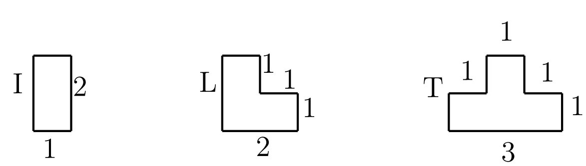
   (b) **[15]** Na koliko načinov lahko pobarvamo vozlišča grafa Γ s tremi barvami (sosednji točki sta lahko enake barve), pri čemer ne ločimo med barvanji, ki se razlikujejo zgolj za avtomorfizem grafa Γ?

3. Naj bo T drevo in naj bo $d = \text{diam}(\Gamma)$. Nadalje, naj bosta P_1 in P_2 poti v drevesu T dolžine d.

   (a) **[15]** Dokaži, da se poti P_1 in P_2 sekata in da je graf, induciran s presekom njunih točk, pot (morda dolžine 0).

   (b) **[10]** V primeru, ko je d liho število, dokaži, da imata potem P_1 in P_2 vsaj eno skupno povezavo. Ali to velja tudi brez predpostavke o lihosti premera? Dokaži ali poišči protiprimer.

4. Na voljo imamo neomejeno število tlakovcev oblik I, L in T.



(a) **[5]** Na koliko načinov lahko tlakujemo hodnik velikosti 2×4 samo s tlakovci oblik I in L?

(b) **[20]** Naj a_n označuje število možnih različnih tlakovanj hodnika velikosti $2 \times n$ s tlakovci oblik I, L in T. Izpelji rekurzivno enačbo za a_n in izračunaj a_{10}.

5. **[25]** Poišči rešitev rekurzivne enačbe

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 5a_{n+1} + 3a_n = 6; \qquad a_0 = -\frac{1}{2}, a_1 = 4, a_2 = -6.$$

6. Naj bo G graf, ki ga dobimo iz Petersenovega grafa tako, da odstranimo eno povezavo na zunanjem ciklu.

(a) **[10]** Ali ima G kakšno hamiltonovo pot? Kaj pa hamiltonov cikel?

(b) **[5]** Določi kromatično število $\chi(G)$.

(c) **[10]** Ali je G ravninski?

Rešitve:

(a) (a) k^n, (b) $k^{\underline{n}}$, (c) $\binom{k}{2}^n$, (d) $(2^k - 1)^n$.

(b) (a) Grupa simetrij pravilnega šestkotnika D_6, (b) 276.

(c) Glej zbirko vaj.

(d) (a) 11. (b) Za a_n dobimo rekurzivno enačbo $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} - a_{n-3}$. Začetni pogoji so $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ in $a_4 = 11$ (iz točke (a)). Z zaporednim računanjem členov zaporedja dobimo $a_{10} = 1853$.

(e) $a_n = -\frac{1}{4}n + \frac{1}{2} - (-3)^n + \frac{3}{4}n^2$.

(f) (a) Ima hamiltonovo pot, nima pa hamiltonovega cikla, (b) $\chi(G) = 3$, (c) graf ni ravninski.

Pisni izpit 29. junija 2009

1. Koliko različnih besed dolžine n lahko sestavimo iz abecede s k znaki, če:

   (a) **[5]** vsaka črka nastopa največ enkrat?

   (b) **[5]** se črke lahko poljubnokrat ponovijo?

   (c) **[15]** sestavljamo črke iz slovenske abecede s 25 znaki, zanimajo pa nas besede dolžine 17, ki vsebujejo vseh pet samoglasnikov, se začnejo s soglasnikom, med vsakima zaporednima soglasnikoma pa je natanko en samoglasnik?

2. (a) **[5]** Določi grupo avtomorfizmov grafa $K_{2,3}$.

   (b) **[20]** Na koliko neekvivalentnih načinov lahko pobarvamo vozlišča grafa $K_{2,3}$ s tremi barvami, če štejemo dve barvanji za enaki, kadar se razlikujeta zgolj za avtomorfizem grafa. (Sosednji vozlišči sta lahko pobarvani z enako barvo.)

3. **[25]** Koliko je nizov dolžine n nad abecedo $\{1, 2, 3\}$, ki ne vsebujejo strnjenega podniza 12?

4. **[25]** Naj bo G povezan graf. Nadalje naj bosta $v \in V(G)$ in $d \in \mathbb{N}$ takšna, da ima vsaka točka iz $V(G)\backslash\{v\}$ stopnjo največ d, medtem ko je $\deg(v)$ lahko večja od d. Pokaži, da od tod sledi $\chi(G) \leq d + 1$.

Rešitve:

1. (a) $k^{\underline{n}}$, (b) k^n, (c) $20^9 \cdot S(8, 5) \cdot 5!$.

2. (a) $S_2 \times S_3$, (b) 60.

3. $a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

4. Točke grafa G razvrstimo v zaporedje:

$$v_1 = v, v_2, v_3, \ldots, v_n.$$

   Točko v_1 pobarvamo s prvo barvo. Potem barvamo točke po vrsti, pri čemer vsako točko pobarvamo s prvo prosto barvo (torej s prvo barvo, s katero še ni pobarvana nobena njej sosednja točka). Ker imajo vse točke v_i, za $i \geq 2$, stopnjo največ d, je na i-tem koraku uporabljeno največ d barv za že pobarvane sosede točke v_i, tako da lahko točko v_i pobaravamo z eno od prvih $(d + 1)$-barv. Ker to velja za vsak i, nam $d + 1$ barv zadošča, da pobarvamo vse točke grafa. Torej je $\chi(G) \leq d + 1$.

Pisni izpit 11. septembra 2009

1. **[25]** Koliko različnih besed, ki ne vsebujejo nobenega od strnjenih podnizov “LJUB”, “ANA”, “UBA” lahko sestavimo iz črk besede LJUBLJANA? Uporabi načelo vključitve in izključitve.

2. (a) **[10]** Na koliko neekvivalentnih načinov lahko pobarvamo *oglišča* tetraedra s tremi barvami?

   (b) **[15]** Na koliko neekvivalentnih načinov pa lahko pobarvamo *robove* tetraedra s tremi barvami?

   V obeh primerih štejemo dve barvanji za ekvivalentni, kadar se razlikujeta zgolj za rotacijo tetraedra.

3. **[25]** Reši rekurzivno enačbo

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = 4(-1)^n; \qquad a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1.$$

4. Naj bosta n in m naravni števili, večji ali enaki 3, in naj bo G kubičen, ravninski graf, ki ima samo lica dolžin n in m. Označimo z f_n število lic dolžine n in z f_m število lic dolžine m.

   (a) **[15]** Naj velja $6 \notin \{m, n\}$. Pokaži, da potem velja $\gcd(n-6, m-6) \mid 12$, kjer je $\gcd(n, m)$ največji skupni delitelj števil n in m.

   (b) **[10]** Koliko je lahko n, če je $m = 6$?

   (c) **[Dodatnih 10 točk.]** Za vsakega od dopustnih n-jev iz točke (b) poišči primer ustreznega grafa.

1. kolokvij, 2010

1. ([25]) Na koliko načinov lahko razvrstimo 9 prstanov na štiri prste desne roke (brez palca), če

   (a) vrstni red prstanov na prstu ni pomemben, prsti so lahko tudi prazni;

   (b) vrstni red prstanov na prstu ni pomemben, na vsakem prstu mora biti vsaj en prstan;

   (c) vrstni red prstanov na prstu je pomemben, prsti so lahko tudi prazni;

   (d) vrstni red prstanov na prstu je pomemben, na vsakem prstu mora biti vsaj en prstan.

2. ([25]) Čarovnik ima pet prijateljev. V času trajanja čarovniške konference je z vsakim izmed prijateljev skupaj večerjal 10-krat, z vsakim parom prijateljev 5-krat, z vsako trojico prijateljev 3-krat, z vsako četverico dvakrat in z vsemi petimi skupaj enkrat. Koliko dni je trajala konferenca, če je 6-krat večerjal sam?

3. Naj bodo $L(n, k)$ (nepredznačena) Lahova števila in naj bo

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} L(n,k) x^{\underline{k}}.$$

   (a) ([5]) Izračunaj a_1 in a_2.

   (b) ([20]) Izpelji in dokaži splošno formulo za a_n.

4. ([25]) Kvadrat razdelimo na mrežo velikosti 4×4 in barvamo polja z belo in črno barvo. Koliko različnih "šahovnic" lahko na tak način dobimo, če ne ločimo med zavrtenimi šahovnicami.

Rešitve:

1. (a) $4^9 = 262144$,

   (b) $4!S(9,4) = 186480$,

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} k! L(9,k) = 79833600$,

   (d) $4!L(9,4) = 20321280$.

2. Naj bo U množica vseh dni konference in

$$A_i = \{\text{dnevi, ko je čarovnik večerjal z } i\text{-tim prijateljem}\}.$$

Potem je:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 5 \cdot 10 = 50\\
S_2 &= \binom{5}{2} \cdot 5 = 50\\
S_3 &= \binom{5}{3} \cdot 3 = 30\\
S_4 &= \binom{5}{4} \cdot 2 = 10\\
S_5 &= 1
\end{aligned}
$$

in

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)^c| = 6.$$

Zato je

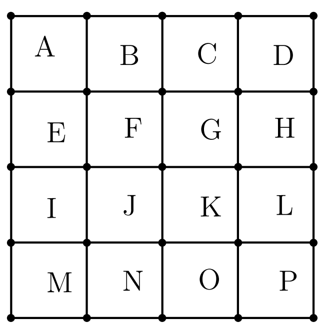
$$
\begin{aligned}
|U| &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| + |(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)^c|\\
&= 50 - 50 + 30 - 10 + 1 + 6 = 27.
\end{aligned}
$$

Konferenca je torej trajala 27 dni.

3. (a) $a_1 = x$, $a_2 = x(x+1) = x^{\overline{2}}$.

   (b) $a_n = x^{\overline{n}}$, dokaz z indukcijo po n, pri čemer upoštevamo rekurzivno formulo za Lahova števila $L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1)L(n-1,k)$.

4. Grupa rotacij kvadrata $G = \{id, r, r^2, r^3\}$, kjer je r rotacija za kot $\pi/2$ v pozitivni smeri, je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_4$ in deluje na množici vseh 16-ih polj mreže:



Elementi grupe G imajo glede na to delovanje ciklično strukturo

$$
\begin{aligned}
&id = (A)(B)(C)(D)(E)(F)(G)(H)(I)(J)(K)(L)(M)(N)(O)(P),\\
&r = (AMPD)(BIOH)(CENL)(FJKG),\\
&r^2 = (AP)(MD)(BO)(IH)(CN)(EL)(FK)(JG)\\
&r^3 = (ADPM)(BHOI)(CLNE)(FGKJ).
\end{aligned}
$$

Zato je $c(id) = 16$, $c(r) = c(r^3) = 4$ in $c(r^2) = 8$, število vseh neekvivalentnih barvanj z dvema barvama pa je

$$m = \frac{1}{4}(2^{16} + 2 \cdot 2^4 + 2^8) = 16456.$$

2. kolokvij, 2010

IZPIT (naloge 1–4) / 2. KOLOKVIJ (naloge 3–6)

1. (a) **[5]** Koliko različnih besed dolžine 6 lahko tvorimo iz črk besede MURMUR?
   (b) **[10]** Koliko besed iz točke (a) je takih, ki ne vsebujejo strnjenega podniza RUM?
   (c) **[10]** Koliko besed iz točke (a) je takih, da nobeni dve zaporedni črki nista enaki?

2. **[25]** Na koliko neekvivalentnih načinov lahko pobarvamo ploskve piramide s kvadratno osnovno ploskvijo z rdečo, belo, modro in zeleno barvo, če imamo dve pobarvani piramidi za ekvivalentni, kadar lahko spremenimo eno v drugo zgolj z rotacijo?

3. **[25]** Za rešitev rekurzivne enačbe

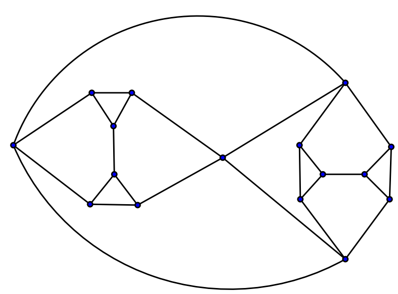
$$\alpha a_{n+3} - 3a_{n+1} + \beta a_n = 18n, \qquad a_0 = 0, a_1 = \gamma \text{ in } a_2 = 3,$$

   velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n + (-2)^n}{n^3} = 3.$$

   Določi parametre α, β in γ ter poišči rešitev rekurzivne enačbe.

4. Za graf Γ na spodnji sliki:
   (a) **[5]** Ugotovi, ali vsebuje kak eulerjev sprehod ali eulerjev obhod.
   (b) **[10]** Ugotovi, ali vsebuje kako hamiltonovo pot ali hamiltonov cikel.
   (c) **[10]** Določi $\chi(\Gamma)$.

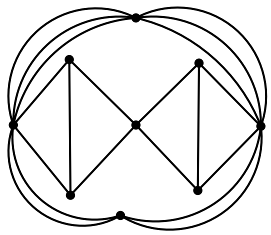


5. Reši rekurzivno enačbo

$$a_n - 3a_{n-1} + 6a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0$$

   pri pogojih $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ in $a_2 = 4$.

6. Koliko vpetih dreves ima graf na spodnji sliki?



Rešitve:

1. (a) $\dfrac{6!}{2!2!2!} = 90.$

   (b) $4! - 1 = 23.$

   (c) Naj bo U množica vseh permutacij besede MURMUR, A_1 množica tistih permutacij, ki vsebujejo strnjeni podniz MM, A_2 množica tistih permutacij, ki vsebujejo strnjeni podniz RR in A_3 množica tistih permutacij, ki vsebujejo strnjeni podniz UU. Načelo vključitev in izključitev nam da:

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 = 90 - 90 + 36 - 6 = 30.$$

2. Generator grupe rotacij je rotacija z osjo skozi vrh piramide in središče osnovne ploskve za kot $\pi/2$. Grupa rotacij je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_4$. Neekvivalentnih barvanj s štirimi barvami je
$$m = \frac{1}{4}(4^2 + 4^3 + 4^2 + 4^5) = 280.$$

3. $a_n = 6n + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}(-2)^n + n^3 - 4n^2$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ in $\gamma = 4$.

4. (a) Graf vsebuje več kot dve točki lihe stopnje. Torej ne obstaja eulerjev sprehod v grafu in zato tudi ne eulerjev obhod.

   (b) Graf vsebuje hamiltonov cikel in zato tudi hamiltonovo pot.

   (c) $\chi(\Gamma) = 4.$

5. $a_n = \dfrac{2}{3} + 2^n \left(-\dfrac{2}{3} \cos \dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \sin \dfrac{n\pi}{3} \right).$

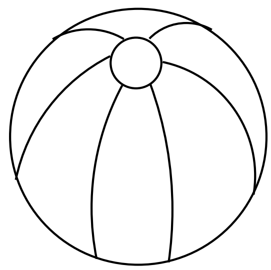
6. Z zaporednim skrčevanjem in odstranjanjem najprej večkratnih in nato še ostalih povezav pokažemo, da je
$$\tau = 2 \cdot 64 \cdot 108 + 36 \cdot 64 = 16128.$$

Pisni izpit 30. junija 2010

1. **[25]** Žogo zlepimo iz osmih gumijastih krp, dveh okroglih enake velikosti in šestih štirikotnih enake velikosti, kot kaže slika. Koliko različnih žog lahko naredimo, če:

   (a) imamo na voljo krpe (okrogle in štirikotne) črne, bele, zelene in rumene barve?

   (b) imamo na voljo črne in bele okrogle krpe ter zelene in rumene štirikotne krpe?



2. **[25]** Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je podana z $f(1) = 1$ in

$$f(n+1) = \begin{cases} 2f(n); & \text{če je } n \text{ liho} \\ 2f(n)+1; & \text{če je } n \text{ sodo.} \end{cases}$$

   Poišči eksplicitno formulo za $f(n)$. (*Namig: oglej si razliko* $f(n+1) - f(n)$.)

3. **[25]** Naj bo Γ povezan graf, v katerem za vsak par povezav $e, f \in \Gamma$ velja

$$\min\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} = \max\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} - 2.$$

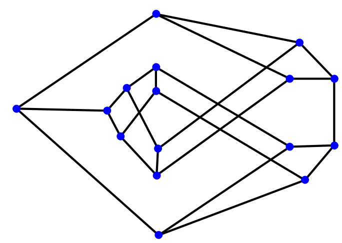
   Dokaži, da je Γ drevo.

4. Za graf Γ na spodnji sliki:

   (a) **[5]** Ugotovi, ali vsebuje kako hamiltonovo pot ali hamiltonov cikel.

   (b) **[10]** Ugotovi, ali je ravninski.

   (c) **[10]** Določi njegovo kromatično število $\chi(\Gamma)$.



Rešitve:

1. Grupa simetrij je izomorfna diedrski grupi D_6 simetrij pravilnega šestkotnika. Če si pogledamo delovanje te grupe na vseh osmih ploskvah, dobimo po Cauchy-Frobeniusovi lemi:

   (a) $\frac{1}{12}(4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 4^8 + 4^5 + 4^5 + 4^4 + 4^5 + 4^4 + 4^4) = 5920$;

   (b) $\frac{1}{12}(2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^8 + 2^5 + 2^5 + 2^4 + 2^5 + 2^4 + 2^4) = 40$.

2. Opazimo, da za vsak n velja $f(n+1) - f(n) - 2f(n-1) = 1$. Poleg tega velja še $f(1) = 1$ in $f(2) = 2f(1) = 2$. Rešimo rekurzivno enačbo in dobimo

$$f(n) = \frac{2}{3}2^n - \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2}.$$

3. Denimo, da Γ ni drevo; torej vsebuje cikel. Naj bo C cikel najkrajše dolžine v Γ; njegova dolžina naj bo n. Naj bosta e in f nasprotni povezavi na C.

   Če je $n = 2k$ za neko naravno število k, je $\min\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} = k-1$ in $\max\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} = k$.

   Če je $n = 2k+1$ za neko naravno število k, je spet $\min\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} = k - 1$ in $\max\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} = k$.

   Sledi $\min\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} = \max\{d(u,v) : u \text{ krajišče } e, v \text{ krajišče } f\} - 1$, kar je v nasprotju s predpostavko. Torej povezani graf Γ ne vsebuje nobenega cikla in mora biti drevo.

4. (a) Graf ima hamiltonov cikel (in zato tudi hamiltonovo pot).

   (b) Graf ni ravninski; poiščemo subdivizijo grafa $K_{3,3}$.

   (c) Opazimo, da je $\Delta(\Gamma) = 3$, zato je po Brooksovem izreku je $\chi(\Gamma) \leq 3$. (Saj Γ ni niti polni graf niti cikel lihe dolžine.) Ker Γ vsebuje lihe cikle, mora biti $\chi(\Gamma) \geq 3$. Torej je $\chi(\Gamma) = 3$.

Pisni izpit 2. septembra 2010

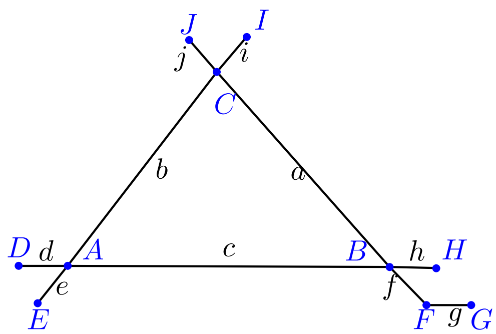
1. Naj bo $\mathcal{M}$ množica $n \times m$ matrik ničel in enic.

   (a) **[5]** Koliko matrik v množici $\mathcal{M}$ je takih, da vsak izmed m stolpcev vsebuje vsaj eno enico?

   (b) **[5]** Naj bo $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $|J| = k$. Koliko matrik iz (a) je takšnih, da za vsak $i \in J$ velja, da je i-ta vrstica ničelna.

   (c) **[15]** Naj bo a_{nm} število vseh matrik iz $\mathcal{M}$, ki imajo v vsaki vrstici in vsakem stolpcu vsaj eno enico. S pomočjo načela vključitev in izključitev ter točke (b) izračunaj a_{nm}.

2. Dan je graf G:



   (a) **[5]** Določi vse avtomorfizme grafa G in jih predstavi kot permutacije na množici vozlišč $V(G) = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$.

   (b) **[5]** Vsak avtomorfizem iz točke (a) predstavi kot permutacijo na množici povezav $E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$.

   (c) **[15]** Na koliko načinov lahko pobarvamo *povezave* grafa G s tremi barvami, do avtomorfizma natančno? (Ne zahtevamo, da sta sosednji povezavi različno pobarvani.)

3. **[25]** Reši rekurzivno enačbo

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 5a_{n+1} + 3a_n = 16$$

   pri pogojih $a_0 = 0$, $a_1 = 10$ in $a_2 = 8$.

4. *Ekscentričnost* vozlišča v v povezanem grafu G je definirana z $e(v) = \max\{d(v, x) \mid x \in V(G)\}$, *polmer* grafa G pa je $r(G) = \min\{e(v) \mid v \in V(G)\}$. Za vozlišče $v \in V(G)$ pravimo, da je *centralno*, če velja $e(v) = r(G)$. *Center* grafa G je množica vseh centralnih vozlišč, označimo ga s $C(G)$.

   (a) **[15]** Pokaži, da za vsako drevo T velja $|C(T)| \in \{1, 2\}$.

   (b) **[10]** Pokaži, da za poljuben povezan graf G velja $\operatorname{diam}(G) \leq 2 \cdot r(G)$.

Rešitve:

1. (a) $(2^n - 1)^m$.

   (b) $(2^{n-k} - 1)^m$.

   (c) Definiramo

   $A_i = \{M \in \mathcal{M} \mid$ vsak stolpec matrike M vsebuje vsaj eno enico in i-ta vrstica je ničelna$\}$.

   Z uporabo načela vključitev in izključitev dobimo

   $$S_k = \binom{n}{k}(2^{n-k} - 1)^m$$

   in

   $$a_{nm} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(2^{n-k} - 1)^m.$$

2. (a) id, $\alpha = (ED)$, $\beta = (IJ)$, $\gamma = (AC)(EI)(DJ)$, $\alpha\beta = (ED)(IJ)$, $\gamma\alpha = (AC)(EIDJ)$, $\gamma\beta = (AC)(EJDI)$, $\gamma\alpha\beta = (AC)(EJ)(DI)$.

   (b) id, $\alpha = (ed)$, $\beta = (ij)$, $\gamma = (ac)(ei)(dj)$, $\alpha\beta = (ed)(ij)$, $\gamma\alpha = (ac)(eidj)$, $\gamma\beta = (ac)(ejdi)$, $\gamma\alpha\beta = (ac)(ej)(di)$.

   (c) $m = \frac{1}{8} \cdot (3^{10} + 2 \cdot 3^9 + 3^8 + 2 \cdot 3^7 + 2 \cdot 3^6) = 13851$.

3. $a_n = -(-3)^n + 2n^2 + 4n + 1$.

4. (a) Tvorimo zaporedje dreves: $T_0 = T$; T_1 je drevo, ki ga dobimo, ko T_0 odstranimo vse liste; T_2 je drevo, ko T_1 odstranimo vse liste... V splošnem, drevo T_j dobimo tako, da drevesu T_{j-1} odstranimo vse liste. V končno mnogo korakih pridemo do drevesa T_r, ki je bodisi K_1 bodisi K_2.

   V zaporedju $T_0, T_1, \ldots, T_r$ si poglejmo poljubni zaporedni drevesi T_i in T_{i+1}. Opazimo, da je $C(T_i) = C(T_{i+1})$. Torej je po indukciji $C(T) = C(T_r)$, slednji pa ima očitno moč 1 (če je $T_r = K_1$) oziroma 2 (če je $T_r = K_2$).

   (b) Naj bosta $u, v \in V(G)$ poljubni vozlišči, za kateri velja $d(u,v) = \mathrm{diam}(G)$, in naj bo c neka centralna točka. Potem je

   $$\mathrm{diam}(G) = d(u,v) \leq d(u,c) + d(c,v) \leq 2e(c) = 2r(G).$$