

Barvanje grafov

A) Barvanje vozlišč

Definicija. Naj bo k iz N_0 . Preslikava $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ je **pravilno k -barvanje vozlišč** grafa G , če je $f(u) \neq f(v)$ za vse pare sosednjih vozlišč u in v grafa G . Najmanjši k , za katerega obstaja pravilno k -barvanje vozlišč grafa G , označimo $hi(G)$ in imenujemo **kromatično število** grafa G .

Trditev. $hi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Izrek štirih barv. G ravninski graf $\implies hi(G) \leq 4$

Oznaka. $P_G(k)$ označuje število vseh pravilnih k -barvanj vozlišč grafa G .

Rekurzivna formula za $P_G(k)$: Za vsako povezavo e grafa G velja

$$P_{G-e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k).$$

Trditev. $P_G(k)$ je polinom spremenljivke k stopnje $|V(G)|$ s celimi koeficienti in z vodilnim koeficientom 1.

Definicija. Polinom $P_G(k)$ je **kromatični polinom** grafa G .

B) Barvanje povezav

Definicija. Naj bo k iz N_0 . Preslikava $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ je **pravilno k -barvanje povezav** grafa G , če je $f(e) \neq f(f)$ za vse pare povezav $e \neq f$, ki se stikajo v skupnem krajišču. Najmanjši k , za katerega obstaja pravilno k -barvanje povezav grafa G , označimo $hi'(G)$ in imenujemo **kromatični indeks** grafa G .

Trditev. $hi'(G) = hi(L(G)) \geq \Delta(G)$.

Vizingov izrek. Za vse grafe G je $hi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Definicija. Graf G je:

- **razreda 1**, če je $hi'(G) = \Delta(G)$,
- **razreda 2**, če je $hi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Izrek. Vsak dvodelni graf je razreda 1.