Drevesa in cikli

Definicija. ***Drevo*** je povezan graf brez ciklov. ***Gozd*** je graf brez ciklov.

Trditev. Graf *G* je gozd <===> vsaka povezana komponenta *G* je drevo.

Definicija. Vozlišče *v* grafa *G* je ***prerezno vozlišče****, če je Omega(G - v) > Omega(G).*
Povezava *e* grafa *G* je ***most****, če je Omega(G - e) > Omega(G).*

Trditev. Če je povezava *e* most v *G*, je *Omega(G - e) = Omega(G) + 1*.

*Trditev. P*ovezava *e* je most v *G* <===> povezava *e* ni vsebovana v nobenem ciklu grafa *G*.

Posledica. *G* drevo <===> *G* povezan graf, vsaka povezava je most

Izrek 1. Za vsak graf *G* so naslednje trditve ekvivalentne:
(1) *G* je drevo,
(2) *G* je povezan graf, *|E(G)| = |V(G)| - 1*,
(3) *G* je brez ciklov, *|E(G)| = |V(G)| - 1*.

Izrek 2. Za vsak graf *G* so naslednje trditve ekvivalentne:
(1) *G* je drevo,
(2) za vsaki dve vozlišči *u*,*v* grafa *G* obstaja v *G* natanko ena pot od *u* do *v*,
(3) *G* je brez ciklov, za vsaki dve različni nesosednji vozlišči *u*,*v* grafa *G* pa ima graf *G* natanko en cikel.

Definicija. Drevo *T* je ***vpeto drevo*** v grafu *G*, če je *T* vpet podgraf grafa *G*.

Izrek. *G* vsebuje vpeto drevo <==> *G* povezan

Definicija. **Ciklomatično število** *gama(G)* grafa *G* je najmanjše število povezav, ki jih je treba odstraniti iz grafa *G*, da dobimo gozd.

Izrek. *gama(G) = |E(G)| - |V(G)| + Omega(G)*

Oznaka. S *tau(G)* označimo število vpetih dreves v grafu *G*.

Rekurzivna formula za tau(G). Za vsako povezavo *e* grafa *G* je *tau(G) = tau(G-e) + tau(G/e).*

Cayleyeva formula. Za vsa naravna števila *n* je $tau(K_n) = n^{n-2}$.

Definicija. ***Eulerjev sprehod*** v *G* je sprehod, ki vsebuje vsako povezavo grafa *G* natanko enkrat. ***Eulerjev obhod*** v *G* je obhod, ki vsebuje vsako povezavo grafa *G* natanko enkrat. Graf *G* je ***Eulerjev graf***, če vsebuje Eulerjev obhod.

Izrek. Povezan graf je Eulerjev natanko tedaj, ko so vsa vozlišča sode stopnje.

Izrek. Povezan graf ima Eulerjev sprehod natanko tedaj, ko ima kvečjemu dve vozlišči sode stopnje.

Definicija. ***Hamiltonova pot*** v *G* je pot, ki vsebuje vsa vozlišča grafa *G*. ***Hamiltonov cikel*** v *G* je cikel, ki vsebuje vsa vozlišča grafa *G*. Graf *G* je ***Hamiltonov graf***, če vsebuje Hamiltonov cikel.

Izrek. Če v grafu *G* obstaja neprazna množica vozlišč *S*, tako da je *Omega(G-S)* > |*S*|, *G* ni Hamiltonov graf. Če v *G* obstaja množica vozlišč *S*, tako da je *Omega(G-S)* > |*S*| + 1, *G* nima Hamiltonove poti.

Orejev izrek. Naj bo |*V(G)*| >= 3. Če za vse različne nesosednje *u, v* iz *V(G)* velja: *d(u)* + *d(v)* >= |*V(G)*|, je *G* Hamiltonov graf.

Diracov izrek. Naj bo |*V(G)*| >= 3. Če je *delta(G)* >= |*V(G)*|/2, je *G* Hamiltonov graf.