**Načelo vključitev in izključitev (NVI)**

***Izrek.*** Naj bodo *A1, A2, ..., An* podmnožice končne množice *A*. Za *k* = 0, 1, ..., *n* označimo:

*Nk =* št. elementov *A*, ki pripadajo natanko *k* množicam *Ai,
Sk =* vsota moči vseh presekov po *k* množic *Ai* (*S0 = |A|*).

Potem velja:

a) *Sk =* vsota *k <= j <= n* (*j* nad *k*) *Nj,*
b) *Nk =* vsota *k <= j <= n* (-1)*j+k*(*j* nad *k*) *Sj.*

***Posledica*** *(načelo vključitev in izključitev, NVI).* Naj bodo *A1, A2, ..., An* podmnožice končne množice A. Označimo z *Ai*' komplement *Ai* v *A.* Potem je:

a) | presek *1 <= i <= n* *Ai*'| = vsota *0 <= k <= n* (-1)*k Sk,*
b) | unija *1 <= i <= n* *Ai* | = vsota *1 <= k <= n* (-1)k+1 *Sk.

Zgledi uporabe NVI:*

1. Število permutacij iz simetrične grupe *Sn* brez negibne točke je enako
*n!* vsota *0 <= j <= n* (-1)*j/j!.*

2. Število permutacij iz *Sn* z natanko *k* negibnimi točkami je enako
*n!*/*k!* vsota *0 <= j <= n-k* (-1)*j/j!.*

3. Povprečno število negibnih točk enakomerno naključno izbrane permutacije iz *Sn* je enako 1.

#### Bijekcije brez prepovedanih parov

*Definicija.* Naj bo *D* šahovska deska, ki ji lahko nekaj polj manjka, in *tk*(*D*) število postavitev *k* nenapadajočih se trdnjav na desko *D*. Označimo število polj deske *D* z *|D|*. Polinom

*T*(*D,x*) *=* vsota *0 <= k <= |D|* *tk*(*D*) *xk*

imenujemo *trdnjavski polinom* deske *D.*

***Izrek*** (rekurzivne formule za *T*(*D,x*)).

1. Naj bo deska *D* unija desk *D1* in *D2*, za kateri velja: množici vrstic desk *D1* in *D2* sta disjunktni, prav tako sta disjunktni množici stolpcev desk *D1* in *D2.* Potem je *T*(*D,x*) = *T*(*D1,x*) *T*(*D2,x*).

2. Naj bo *a* = (*i,j*) poljubno polje deske *D*. Z *D\a* označimo desko, ki jo dobimo iz *D,* če odstranimo polje *a*, z *D/a* pa desko, ki jo dobimo iz *D*, če odstranimo vsa polja v vrstici *i* in vsa polja v stolpcu *j*. Potem je *T*(*D,x*) = *T*(*D\a, x*) *+ x T*(*D/a, x*).

***Trditev.*** Naj bo *D'* komplement deske *D* v pravokotni deski velikosti *m* x *n*. Potem je

*tk*(*D*) = vsota *0 <= j <= m* (-1)*j* (*m-j* nad *k-j*) (*n-j* nad *k-j*) (*k-j*)! *tj*(*D*').